

# Занятие 1. Упражнения из теории меры и повторение интегралов с параметром

7 сентября 2021 г.

1. Пусть  $\mathfrak{A}$  и  $\mathfrak{B}$  — полукольца множеств пространств  $X$  и  $Y$  соответственно. Докажите, что семейство множеств

$$C = \left\{ A \times B \mid A \in \mathfrak{A}, B \in \mathfrak{B} \right\}$$

— тоже полукольцо множеств пространства  $X \times Y$ .

2. Пусть  $\mathfrak{A}$  — полукольцо множеств пространства  $X$ . Рассмотрим семейства множеств

$$R_0(\mathfrak{A}) = \left\{ \bigcup_{j=1}^n A_j \mid A_j \in \mathfrak{A}, A_i \cap A_j = \emptyset \right\}; \quad R(\mathfrak{A}) = \left\{ \bigcup_{j=1}^n A_j \mid A_j \in \mathfrak{A} \right\}.$$

Докажите, что  $R = R_0$ .

3. Вычислите следующие пределы:

1.  $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \int_{1-\alpha}^{1+\alpha} \frac{dx}{\alpha + x^2(\alpha + \alpha^3)},$

2.  $\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_0^\pi e^{-R \sin \theta} d\theta,$

3.  $\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_0^{2\pi} e^{-R \sin \theta} d\theta,$

4.  $\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_0^\pi e^{-\sin R\theta} d\theta,$

5.  $\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_0^\pi e^{-R \sin R\theta} d\theta.$

4. Для целого числа  $n$  рассмотрим функцию Бесселя  $J_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(n\varphi - x \sin \varphi) d\varphi$ . Докажите тождество

$$x^2 J_n''(x) + x J_n'(x) + (x^2 - n^2) J_n(x) = 0.$$

5. Вычислите следующие интегралы, дифференцируя по параметрам (будьте осторожны — важно следить за сходимостью интегралов!)

1.  $\int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x} dx, a, b > 0,$

2.  $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} e^{-ax} dx,$

3.  $\int_0^\infty \sin \lambda \cos(\lambda x) \frac{d\lambda}{\lambda},$

4.  $\int_0^\infty e^{-x^2 - \frac{a^2}{x^2}} dx.$