Занятие 14. Интегралы второго рода по поверхностям

7.12.21

Старые задачи

1. Вычислите поверхностные интегралы второго рода

- $\int\limits_S x^2y^2z\,dx\,dy$, где S — внешняя сторона полусферы $x^2+y^2+z^2=R$;
- $\int\limits_S x^2\,dydz+y^2dzdx+z^2dxdy$, где S — внешняя сторона сферы $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$;
- $\int\limits_S (2x^2+y^2+z^2)dydz$, где S — внешняя сторона боковой поверхности $\sqrt{y^2+z^2}\le x\le H$;

Новые задачи

2. Вычислите поверхностные интегралы второго рода

- $\int\limits_S xdydz+ydzdx+zdxdy$, где S — внешняя сторона поверхности $z=x^2-y^2$, $|y|\le x\le a$.
- $\int\limits_S x^2dydz+y^2dzdx+z^2dxdy$, где S — внешняя сторона параллелепипеда $0\le x\le a, 0\le y\le b, 0\le z\le c$.
- $\int\limits_S x^3dydz+y^3dzdx+z^3dxdy$, где S — внешняя сторона тетраэдра $0\le x, 0\le y, 0\le z, x+y+z\le a$;
- вычислите интеграл от той же функции, но по внешней стороне единичной сферы.

3. Докажите формулу объема $V(\Omega)=\frac{1}{3}\Big|\int\limits_{\partial\Omega} xdydz+ydzdx+zdxdy\Big|$.

4. Докажите формулу Грина

$$\int\limits_{\partial\Omega}\frac{\partial u}{\partial n}v-\frac{\partial v}{\partial n}ud\mathcal{H}_{d-1}=\int\limits_{\Omega}\Delta uv-\Delta vud\lambda_d,$$

здесь Ω — ограниченная область в $\mathbb{R}^d$ с границей класса C^1, n — внешняя нормаль к границе Ω, а u и v — функции класса C^2.

5. Вычислите интеграл

$$\int\limits_S \frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}dydz+\frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}dzdx+\frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}dxdy$$

по внешней стороне единичной сферы с центром в начале координат.