Листочек 9
Математический анализ. 2 курс

Выдан: 16 ноября   Дедлайн: 15 декабря.

Базовые задачи

1. (2 балла) Оператор $T\colon L^2(0,+\infty)\to L^2(0,+\infty)$ задан равенством

$$(Tf)(x) := \frac{1}{x}\int\limits_0^x f(y)\,dy, \quad x\in(0,+\infty).$$

Докажите, что он непрерывен.

2. (1,5 балла) Пусть мера μ на плоскости такова, что для всякого шара $B_r(x)$ имеет место равенство $\mu(B_r(x)) = |x|^2r^2 + \frac{r^4}{2}$. Докажите, что мера μ абсолютно непрерывна по мере Лебега и найдите её плотность.

3. (1,5 балла) Пусть (X,μ) — измеримое пространство и пусть $⨍_E f = \frac{1}{|E|}\int_E f$ (здесь E — измеримое подмножество ненулевой конечной меры, а f — суммируемая функция). Определим среднее колебание функции f по множеству E формулой

$$\mathrm{O}_E(f) = ⨍\limits_E \Big|f - ⨍\limits_E f\Big|.$$

Докажите, что если $F\subset E$, то $\mathrm{O}_F(f)\le |E|/|F|\mathrm{O}_E(f)$.

4. (1 балл) Пусть f_n — последовательность суммируемых функций вероятностного пространства (X,μ), удовлетворяющих неравенству

$$\mu(\{x\in X \mid |f_n(x)|\ge t\}) \le \frac{2}{1+t^3}, \quad t>0,$$

сходящаяся почти всюду к функции f. Докажите, что f_n сходится к f в L_2.

5. (1,5 балла) Пусть f — измеримая функция на вероятностном пространстве (X,μ) со значениями в $\mathbb{R}^d$, а вектор $v\in\mathbb{R}^d$ таков что $\mu(\{x\in X \mid \|f(x)\|\ge \frac{1}{4}\|v\|\})\le\frac{1}{4}$. Докажите неравенство

$$\int\limits_X \|f+v\| \ge \int\limits_X \|f\| + \frac{1}{8}\|v\|.$$

6. (1,5 балла) Пусть $E\subset\mathbb{R}$ — множество положительной Лебеговой меры. Доказать, что найдется хотя бы одна пара различных точек из E, расстояние между которыми рационально.

7. (1 балл) Обозначим символом ϕ_k функцию, определённую на отрезке $[0,1]$ следующим образом: если на k-м месте в двоичном разложении числа x стоит 1, то $\phi_k(x)=1$, если нет, то $\phi_k(x)=-1$. Доказать, что

$$\int_{[0,1]} \phi_j(x)\phi_k(x)d\lambda = \begin{cases} 0, & j\ne k,\\ 1, & j=k.\end{cases}$$

8. (1,5 балла) Доказать или опровергнуть следующее утверждение:

Для того, чтобы измеримая на множестве E конечной меры неотрицательная функция f была суммируема, необходимо и достаточно, чтобы сходился ряд $\sum_k \mu(\tilde E_k)$ где $\tilde E_k = \{x\in E; f(x)\ge k\}$

Рейтинговые задачи

9. Докажите, что не существует такой постоянной $C < +\infty$, что для любой C^∞-гладкой 2-формы $f = \rho dx_1 \wedge dx_2$ в диске $\mathbb{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + y^2 < 1\}$ найдётся гладкая 1-форма $u = u_1 dx + u_2 dy$ в $\mathbb{D}$, для которой $du = f$, причём

$$\left\| \frac{\partial u_j}{\partial x_k} \right\|_{L^1(\mathbb{D})} \leq C \cdot \|\rho\|_{L^1(\mathbb{D})}$$

при всех $j, k = 1, 2$.

10. Пусть $S^2 := \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \colon t = 0, x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ — двумерная сфера в $\mathbb{R}^4$. В открытом множестве $\mathbb{R}^4 \setminus S^2$ постройте замкнутую, но не точную гладкую форму степени 1.

11. Пусть $d \in \mathbb{N}$, B — строго положительно определённая вещественная симметричная матрица $d \times d$, m — чётное натуральное число, $l_1, l_2, \ldots, l_m \in \mathbb{R}^d$. Пусть Π_m обозначает множество разбиений множества $\{1, 2, \ldots, m\}$ на пары (двухэлементные подмножества). Для $\sigma \in \Pi_m$ и $j \in \{1, 2, \ldots, m\}$ через $\sigma(j)$ обозначим элемент $k \in \{1, 2, \ldots, m\}$, оказавшийся в паре с j при разбиении σ. Докажите следующее равенство:

$$\int\limits_{\mathbb{R}^d} \langle l_1, x\rangle \cdot \dots \cdot \langle l_m, x\rangle e^{-\langle Bx, x\rangle}\, d\lambda_d(x) = \frac{(2\pi)^{d/2}}{\sqrt{\det B}} \sum_{\sigma \in \Pi_m} \prod_{j \in \{1,2,\ldots,m\}/\sigma} \langle B^{-1} l_j, l_{\sigma(j)}\rangle.$$

($\{1, 2, \ldots, m\}/\sigma$ — фактормножество, то есть множество пар, полученных при разбиении σ; из каждая пара даёт один сомножитель в произведение. Об элементах l_j можно думать как об 1-ковекторах на $\mathbb{R}^d$.)

12. Докажите, что для всякого числа $d \in \mathbb{N}$ существует константа C со следующим свойством. Для всякой функции $g \in L_d(\mathbb{R}^d)$ существуют функции $g_1, g_2, \ldots, g_d \in L_d$, такие что $\sum_j g_j = g$ и для всякого индекса j имеет место неравенство

$$\operatorname{esssup}_{x \in \mathbb{R}^d} \int\limits_{\mathbb{R}} |g_j(x_1, x_2, \ldots, x_{j-1}, s, x_{j+1}, \ldots, x_d)|\, ds \leq C \|g\|_{L_d}.$$

13. Пусть $\varphi \colon \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ — измеримая функция (символом $\mathbb{T}$ обозначена единичная окружность с центром в нуле в $\mathbb{R}^2$, символом $|\cdot|$ — евклидова норма в $\mathbb{R}^2$), такая что для всякой дуги $J \subset \mathbb{T}$ имеет место неравенство

$$\Big| \int\limits_J \varphi \Big| \geq 0.239 |J|.$$

Докажите, что если $|\int_{\mathbb{T}} \varphi| = 0.478\pi$, то функция φ принимает лишь два значения (mod 0).

14. Определим усеченную максимальную функцию на прямой:

$$M_{a,b}[f](x) = \sup_{a < r < b} \;\; ⨍\limits_{|y - x| < r} |f(y)|\, dy, \quad 0 < a < b; f \in L_1(\mathbb{R}).$$

Докажите неравенство $\|M_{a,b}[f]\|_{L_1} \leq (1 + \log b - \log a) \|f\|_{L_1}$.