

Занятие 5. Снова повторные интегралы

4 октября 2021 г.

Новые задачи

1. Вычислите интеграл функции f по области Ω , где

a) $f(x, y) = y^2$, Ω — область, ограниченная кривыми $x = y^2$, $x = y - 2$;

b) $f(x, y) = xy$, Ω — область, заданная неравенствами $x^2 + y^2 \leq 25$, $3x + y \geq 5$;

c) $f(x, y) = (1 + x + y)^{-2}$, Ω — треугольник, ограниченный прямыми $x = 2y$, $y = 2x$, $x + y = 6$.

2. Вычислите $\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz$, где

a) $f(x, y, z) = x + y + z$, Ω — симплекс, ограниченный плоскостями $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x + y + z = 1$;

b) $f(x, y, z) = y$, Ω — область, заданная неравенствами $|x| \leq z$, $0 \leq z \leq 1$, $z \leq y$, $x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$.

c) $f(x, y, z) = xy^2z^3$, Ω — область, ограниченная поверхностями $z = xy$, $y = x$, $x = 1$, $z = 0$;

d) $f(x, y, z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}$, Ω — множество, где $f(x, y, z) \leq 1$.

3. Вычислите интеграл функции $\max(x_1, x_2, \dots, x_d)$ по кубу $[0, 1]^d$.

4. Вычислите объём единичного шара в \mathbb{R}^d .

5. Вычислите интегралы, перейдя к полярным координатам

a) $\int_{9 \leq x^2 + y^2 \leq 25} \frac{dx dy}{x^2 + y^2 - 1}$;

b) $\int_{\mathbb{R}^2} e^{-bx^2 - by^2 + iax^2 + iay^2} (b > 0)$;

c) $\int_{\Omega} y^2 e^{x^2 + y^2} dx dy$, где $\Omega = \{x \geq 0, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq 1\}$;

6. Найдите $\int_{x^2 + y^2 \leq 1, y \geq kx} \text{sign } y dx dy$.