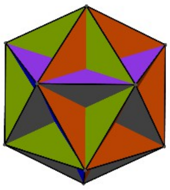
Л.А.Антипова и А.Л.Вернер

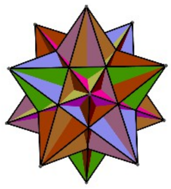
Аналоги теоремы Гаусса для однородных невыпуклых многогранников

Аннотация доклада

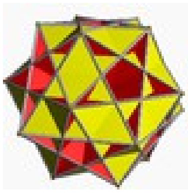
Мы рассматриваем невыпуклые ориентируемые однородные многогранники ненулевой кривизны с выпуклыми гранями. Таких многогранников 7 типов - рис.1 и рис.2:



а) Большой икосаэдр GI

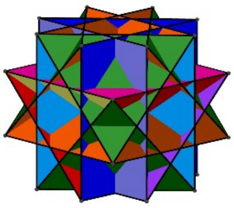


б) Большой додекаэдр GD

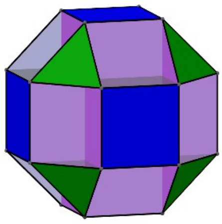


в) Большой битригональный икосододекаэдр

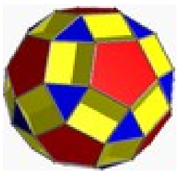
Рис.1



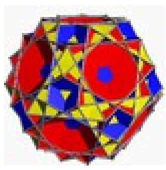
а) Большой ромбокубооктаэдр



б) Малый кубокубооктаэдр.



в) Малый додекоикосододекаэдр.



г) Большой икосоикосододекаэдр

Рис.2

У многогранников, которые изображены на рисунках 1 и 2, многогранные углы не выпуклы и устроены по-разному. «Тройкой» называем многогранники рисунка 1, а «четвёркой» - многогранники рисунка 2.

Рассмотрим многогранный угол V невыпуклого ориентируемого многогранника F, гранями которого являются плоские углы Q_1, Q_2, …, Q_n, Q_1.

Если грани Q_{j-1} и Q_{j+1} лежат по одну сторону от плоскости грани Q_j, то грань Q_j называется гранью *выпуклости.* Если грани Q_{j-1} и Q_{j+1} лежат по разные стороны от плоскости грани Q_j, то грань Q_j называется гранью *перегиба*.

У многогранников «тройки» нет граней перегиба, многогранники «четвёрки» имеют грани перегиба.

Каждый из рассматриваемых нами многогранников P имеет описанную сферу. Мы полагаем, что такая сфера S – единичная и имеет центром точку O.

Обозначим через П полярное преобразование относительно сферы S. Построим многогранник П(P) - полярный многограннику P относительно сферы S. Грани многогранника П(P) – это полярные образы многогранных углов вершин многогранника P. Сферическое изображение A* вершины A многогранника P строится так: сначала строится полярный образ многогранного угла V(A) вершины A, а затем он центрально проектируется на S. Сферическим изображением A* вершины A многогранника «тройки» будет сферический многоугольник, ограниченный замкнутой звёздчатой ломаной положительного поворота. *Площадь этого многоугольника (с учётом кратности) равна 4π минус полный угол вокруг вершины A*. Это утверждение и является аналогом теоремы Гаусса о площади сферического изображения для многогранников «тройки».

Все углы многогранников «четвёрки» - четырехгранные, и к каждой вершине A такого многогранника подходит треугольник и три многоугольника с большим числом сторон. «Кривизной реализации» ψ(A) вершины A такого многогранника назовём 2π минус сумма трёх углов его нетреугольных граней, подходящих к вершине A, но плюс $\pi/3$. И тогда *для вершины A площадь её сферического образа A* равна её «кривизне реализации»*. Это утверждение является аналогом теоремы Гаусса о площади сферического изображения для многогранников «четвёрки».

Это - локальные варианты. Интегральный же вариант формулируется так:

Полная площадь сферического изображения однородного многогранника с выпуклыми гранями равна произведению 4π *и d - плотности (density) этого многогранника*.

В аналоге теоремы Гаусса для многогранников «тройки» кривизна реализации для вершины А многогранника равна 4π минус полный угол вокруг вершины А потому, что многогранный угол этой вершины делает двойной оборот вокруг оси ОА при обходе вокруг вершины.