1. Напоминание о том, что это:

$n \le k$ $\varphi: U \to R^k$ — [illegible], дифференцир. функц.

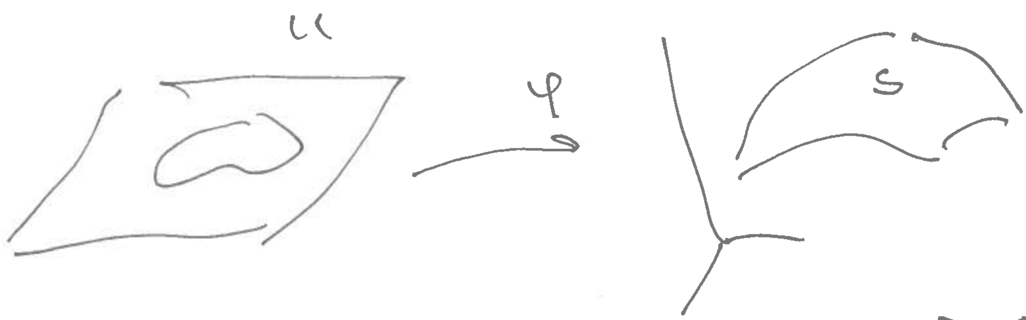
$U \subset R^n$ $S = \varphi(U)$.

—

1. $S \subset R^k$ — борелевское.

2. $\mathfrak{B}(S)$. $\mathfrak{B}(S) = \{E \subset S;\ E = S \cap A,\ A \in \mathfrak{B}(R^k)\}$

в любом $E \in \mathfrak{B}(R^k)$.



3. В R^n λ_n — Лебег, μ_n — Хаусдорф.

$\lambda_n = c\mu_n$.

4. В R^k — тоже можно определить μ_n. В частности — S.

~~$\mathfrak{B}$ ... $E \subset S$ ... $\mu_n(E)$~~

5. Всё можно перенести или и R^n.

$\rho(E) := \mu_n(\varphi(E))$.

6. Две меры на R^n: $\rho(E)$ и $\lambda_n(E)$.

7. $\lambda_n(E)=0 \Rightarrow \rho(E)=0$

~~8.~~ $\cancel{\rho(E)=\int_E h(x)\,dx}$ ← ~~Радон~~ Никодим

8. Две теоремы пока без док-ва:

1. Теорема Радона-Никодима
2. Теорема о плотности мер.

плотность

9. ~~Все~~ $\rho(E)=\int_E h(x)\,dx$

10. $h(x)=\lim_{r\to 0}\frac{1}{|B_r(x)|}\int_{B_r(x)} h(t)\,dt$ — ~~предел~~ (*)

Наша задача найти $h(x)$

16. ∀ т. в сущ. (*) – предел ∃ и $= \Gamma_\varphi(x)$ 1/2.

Поговорим о том почему это и почему так

17. Компактные множества Γ_φ

$0 \in U, \quad \varphi(0) = 0 \qquad \underline{\underline{\Gamma_\varphi(0) = ?}}$

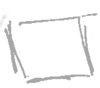
1) Определение касательной плоск. в т. *

2) Касательн. плоск. это

$$\varphi(x_0) + \underline{\underline{D}}\,\Delta x + o(\Delta)$$

Касательно плоск. это $\varphi(x_0) + D_{x_0} R^2$

~~Квадр~~



R^2

3. Можно считать плоскость уравн. на касат. плоск.

4. Выберем в R^{k} базис так, чтоб первые k элементов были в касат. плоск.

Тогда

$$D_\varphi = \begin{pmatrix} * \\ \hline 0 \end{pmatrix}$$

$$D_\varphi^T = \left(*^T \mid 0 \right)$$

$$D_\varphi^* D_\varphi^T = (* *^T) \qquad \det D_\varphi D_\varphi^T = |\det * \cdot *^T| =$$

$$= |\det *|^2$$

Теорема о дифференцировании:

$h: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$; $\nu_h(E) = \int_E h \, d\lambda_n$.

$\Rightarrow \quad h(x) = \lim\limits_{r \to 0} \dfrac{\nu_h(B_r(x))}{B_r(0)}$. — Зашисеть в виде интеграла.

Следствие: Точки Лебега измеримого мн-в.

Важный инструмент. $h: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ | Локальная сумммируемая

$$Mh(x) = \sup\left\{ \frac{1}{|B|} \int_B |h| \, d\lambda_n ; \cancel{x} \in B \right\}$$

не обязательно в центре.

Пример: ~~$h(t)$~~: $n=1$ $\quad h(t) = \chi_{[-1,1]}$

Замечание: $h \in L^1 \not\Rightarrow Mh \in L^1$

Мы увидим, что $p > 1$

$\boxed{\text{Если бы } Mh \in L^1 \text{ и } \|Mh\|_1 \leq C\|h\|_1}$

Нер-во Чебышева $\forall g \in L^1$.

Определение: Слабый тип $(1,1)$

$$\lambda_n\{t : Mh > t\} \leq \frac{1}{t}\|g\|_1$$

~~В частности~~

Теорема слабый тип (1,1)

$$\lambda_n\{Mf > t\} \le \frac{c}{t}\|f\|_1$$

Обобщение для мер:

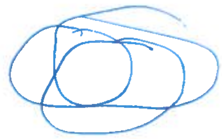
α – конечная мера на R^n: $\alpha(R^n) < \infty$

$$M\alpha(x) = \sup_{x\in B}\left\{\frac{1}{|B|}\int_B d\alpha\right\}$$

$$\{M\alpha > t\} \le \frac{C_n}{t}\alpha(R^n)$$

Имеем дело с борелевскими мерами.

Инструмент:



~~Теорема~~

Лемма Винера о покрытиях.

$\{B_i\}_1^k$ — набор шаров.

$\exists\ i_1, \dots, i_s \in \{1, \dots, k\}$:

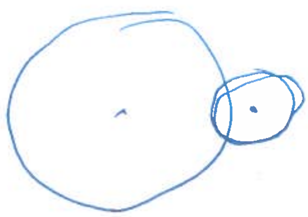
1) $B_{i_j} \cap B_{i_l} = \emptyset$

2) $3B_{i_1} \cup 3B_{i_2} \cup \dots \cup 3B_{i_s} \supset \cup B_j$

Д-во:

B_{i_1} — самый большой шар.

$B_{i_1} \cap B_j \neq \emptyset \Rightarrow 3B_{i_1} \supset B_j$



$\{j : B_j \cap B_{i_1} = \emptyset\}$ — и повторим выбор.

$\Longrightarrow \boxed{4}$

Док-во типа (1,1)

Зафиксировали α - меру, $t > 0$

$$A = \{ x : M\alpha(x) > t \}.$$

1. A - открыто.

2. Достаточно показать

$$\lambda_n(K) < \frac{c_n}{t}\alpha(\mathbb{R}^n), \quad \forall K \subset\subset A.$$

3. Зафиксировали K:

- $\forall x \in K \rightsquigarrow B_x^*$: $\frac{\alpha(B_x^*)}{|B_x|} > t$ - неравенство.
- $B_1, \ldots, B_k$ - конечное покрытие. $K \subset \bigcup B_i$
- $B_{i_1}, \ldots, B_{i_s}$ - подмножество из Вит.

$\Longrightarrow \boxed{\text{Ч}}$

Доказательство теоремы о дифференцировании

1. Это верно для непрерывных ф-ий с компактным носителем

Идея доказательства.

2. Возьми $\varphi \in L^1(\mathbb{R}^n)$

$$m\varphi(x) := \overline{\lim_{t \to 0}} \frac{\int_{B_t(x)} |\varphi(s) - \varphi(x)| \, d\lambda_n(s)}{|B_t(0)|}$$

Утверждение: Нам надо $m\varphi(x) = 0$

$$m(\varphi)(x) \leq M\varphi(x) + |\varphi(x)|$$

Очевидно

3. Слабый тип для mh

(с внешней мерой)

$h \in L^1$

Нам надо

$$\underbrace{\lambda_n^* \{ mh > u \}}_{} \le \frac{Const}{u} \| h_1 \|$$

$$\sqcup \le \lambda_n^* \{ Mh > \frac{u}{2} \} + \lambda_n^* \{ |h| > \frac{u}{2} \}$$

Дальше оценка для Mh.

4. $m(h_1 + h_2) \le m(h_1) + m(h_2)$

потому что

$m(h) = \overline{\lim}$.

5. Теперь фиксируем ε и доказываем

$\lambda^*(mh > u) < \varepsilon$.

Д-во. $g \in C^0$ $\quad \cancel{\|h-g\| \le \delta}$

∟будет выбрано.

$\cancel{m(h)\le m(h-g)}$

Мы знаем что это $=0$

$$m\,h(x) \le m\,(h-g)(x) + m\,g(x)$$

$$\lambda^*\{m\,h(x) > u\} \le \lambda^*\{m(h-g)(x) > u\} \le C\,\frac{\|h-g\|_1}{u}$$

Может быть сделана сколь угодно малой

$\boxed{}$!

Замечания:

1. Точки Лебега ф-ии, множества

2. Параллелепипеды. Дифференциальный базис