План лекции

√ 1. Произведение мер (Конец прошлой лекции)

* * *

2. Определение σ-аддитивности

3. Примеры: – считающая ф-ия и её обобщения.

– обычная длина, квазидлина, стилтьесовская длина.

– объемы в $\mathbb{R}^n$.

3а Два вопроса:

4. Не любое мн-во в $\mathbb{R}$ можно снабдить длиной.

5. Меры в топологических пространствах. Регулярные меры.

6. Теорема Александрова

7. Стилтьесовская длина и объем счетно-аддитивны.

8. σ-структуры: σ-алгебра. Определение.

(Примеры будут позже)

9. Простые свойства: $\mathfrak{A}$-алгебра:

- Если $\{E_i\} \subset \mathfrak{A} \Rightarrow \bigcup E_i \in \mathfrak{A}$ то $\mathfrak{A}$ σ-алгебра.
- Если $\{E_i\} \subset \mathfrak{A} \Rightarrow \bigcap E_i \in \mathfrak{A}$ то $\mathfrak{A}$ σ-алгебра.
- Если $\left.\begin{matrix}\{E_i\} \subset \mathfrak{A} \\ E_i \supset E_{i+1}\end{matrix}\right\} \Rightarrow \bigcap E_i \in \mathfrak{A}$ то $\mathfrak{A}$ σ-алгебра
- Если $\left.\begin{matrix}\{E_i\} \subset \mathfrak{A} \\ E_i \subset E_{i+1}\end{matrix}\right\} \Rightarrow \bigcup E_i \in \mathfrak{A}$ то $\mathfrak{A}$ σ-алгебра

9. Пересечение набора σ-алгебр тоже σ-алгебра.

10. σ-алгебра порож $\mathfrak{S}_\sigma \subset 2^{\mathfrak{X}}$. $\overline{\mathfrak{S}}$ – обозначение

У нас есть план!

НАЧИНАЕМ строить σ-аддитивную меру

исходный пункт:

$\mathfrak{A}$ – полукольцо, μ – мера на $\mathfrak{A}$

дальше → не σ-аддитивная.

11. Что есть в $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$? Мн-ва G_δ, F_σ.

12. Внешняя мера.

(тривиальный пример).

13. Элементарные свойства:

- монотонность.
- Счетная полуаддитивность.

- μ – σ-аддитивна, $A \in \mathfrak{A} \Rightarrow$
  $\Rightarrow \mu^*(A) = \mu(A)$

(Вначале $\mu(A) = \mu(A)$
затем $\bar{\mu}(A) = \mu^*(A)$.)

14. Определение <u>предмеры</u>. (На <u>всех</u> подмн-вах $\mathfrak{X}$)

15. Мн-во <u>измеримое</u> по отношению к предмере.

16. Измеримое множество по отношению к предмере.

17. Рассмотрим квазимеру, порожденную <u>разрывной</u> монотонной ф-цией. Какие мн-ва являются измеримыми?

18. Дальнейший шаг:
Теорема Лебега–Каратеодори.

19. Как это порождает продолжение меры с полукольца.

20. Шаг # 1: Σ это алгебра.

21. Шаг # 2: Усиленная аддитивность.

22. Шаг # 3: Воспользуйтесь индукцией по n, сформулируйте и докажите усиленную аддитивность для n дизъюнктных множеств.

Конец обсужд. конечных структ.

Произведение мер:

$\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ - полукольца, μ в $\mathfrak{A}$, ν в $\mathfrak{B}$.

$\mathfrak{C} = \mathfrak{A} \times \mathfrak{B} = \{ A \times B,\ A \in \mathfrak{A},\ B \in \mathfrak{B} \}$

$\lambda(A \times B) = \mu(A) \cdot \nu(B)$

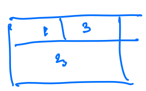
Утв.: λ - мера: $C_1 = A_1 \times B_1$, $C_2 = A_2 \times B_2 \in \mathfrak{C}$

$C_1 \cap C_2 = \emptyset$, $C_1 \cup C_2 \in \mathfrak{C}$

$\Rightarrow \lambda(C_1) + \lambda(C_2) \overset{?}{=} \lambda(C_1 \cup C_2)$

$C_1 \cup C_2 = A \times B$

=



$C_i = A_i \times B_i$ - дизъюнктны.

$C = \bigcup C_i = A \times B$

$\lambda(C) = \mu(A) \cdot \nu(B) \overset{?}{=} \sum \mu(A_i)\, \nu(B_i)$

$A \subset \mathfrak{X}$ $\quad \chi_A(x)$ $\quad \boxed{\mu(A) = \int \chi_A}$

$C = \bigcup C_i = A \times B$

$(x,y) \in C$

$\chi_C(x,y) = \sum_i \chi_{C_i}(x,y) = \sum_i \chi_{A_i}(x)\, \chi_{B_i}(y)$

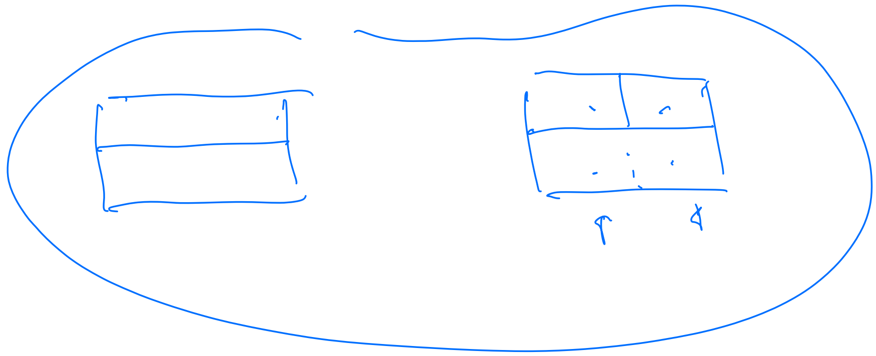
$x \in A$

$\chi_A(x)\, \nu(B) =$

инт. по x

$\Rightarrow \boxed{\mu(A)\nu(B) = \sum \mu(A_i)\, \nu(B_i)}$

$= \sum_i \chi_{A_i}(x)\,\nu(B_i)$



Конец прошлой лекции.

σ-аддитивность.

Опр.

Дано: $\mathcal{B} \subset 2^{\mathfrak{X}}$: $\mu : \mathcal{B} \to \overline{\mathbb{R}}_+$

Опр. μ – σ-адд. если:

$$\{B_i\}_i^\infty \in \mathcal{B} : \quad B_i \cap B_j = \emptyset \ (i \neq j), \quad B := \bigcup B_j \in \mathcal{B}$$

$$\Rightarrow \boxed{\mu(B) = \sum_1^\infty \mu(B_j)}$$

Примеры. 1) $\mathfrak{X}$ $\quad \mathcal{B} = 2^{\mathfrak{X}}$

$B \subset \mathfrak{X} \quad \mu(B) = \# B.$

2) $x \mapsto p(x)$; $\quad \mu(B) = \sum_{x \in B} p(x)$

3) Длина: $\mathcal{L} = \mathcal{P}(R)$

$\mu(\langle a, b \rangle) = b - a.$

$f: R \to R$ и $\boxed{f \text{ - непрерывна} \mid f \nearrow}$

3a) $\mu(\langle a, b \rangle) = f(b) - f(a).$

$\forall E \subset R$

Вопрос: 2^R Существует ли ф-ция

Теорема $\varphi: 2^R \to \overline{R}_+$

Такая что:

1) $\varphi(\emptyset) = 0$

2) φ - σ-аддитивна.

3) $\varphi([0,1]) = 1$

4) $\varphi(A + x) = \varphi(A)$, $A \subset R$, $x \in R$.

Утв.: Такой ф-ции НЕТ

Док-во

Аксиома выбора:

Z - отношение экв: $x, y \in Z$ $x \sim y$.

$x \sim y \Rightarrow y \sim x$

$x \sim x$, $x \sim y$, $y \sim z \Rightarrow x \sim z$

$Z = \bigcup Z_\alpha$ Z_α - классы экв.

Аксиома выбора: $\exists E \subset Z$, $\#(E \cap Z_\alpha) = 1$

$\mathbb{R}$ $x, y \in \mathbb{R}$, $x \sim y$ если $x - y \in \mathbb{Q}$

$E =$ $[0, 1]$ E - мн-во представителей классов экв. из $[0, 1]$.

Утв.: Докажем $\varphi(E)$, - определено:

1. $\varphi(E) < \infty \Leftarrow E \subset [0, 1]$.

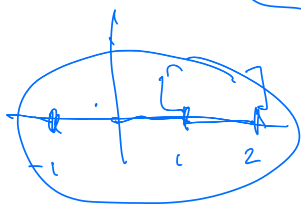
2. $\{E + q;\ q \in [-1, 1] \cap \mathbb{Q}\}$.

$$\varphi\Big(\bigcup_{q \in [-1,1]} (E + q)\Big) = \sum_{q \in [-1,1]} \varphi(E + q) =$$

$q \in Q$ $\qquad$ $q \in Q$

$$= \sum_{\substack{q\in[-1,1]\\ q\in Q}} \varphi(E) \le 3 \qquad \delta -$$

$$\Rightarrow \varphi(E) = 0$$



$$\bigcup_{\lambda \in Q} (E+\lambda) = R,$$

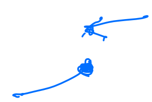
$$\varphi(E+\lambda) = 0.$$

$\Rightarrow \varphi(E) = 0 \longrightarrow$ противоречие.

Два примера:

\#4 Объем в $P(R^n)$

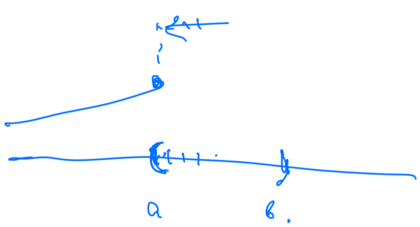
\#5 Квазидлина



$f(t) \nearrow$

$$\mu(\langle a,b\rangle) = f(b) - f(a).$$

Это не счётно аддитивна:

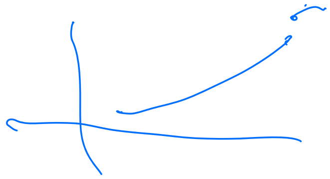


$$\mu(\langle a,b\rangle) = f(b) - f(a)$$

$$I_n = \left(a + \frac{1}{2^{n+1}},\ a + \frac{1}{2^n}\right)$$

$$\mu((a,b)) = \sum \mu(I_n) = f(b) - \lim f(a+0)$$

Стилтьесова длина.



$$\mu([a,b)) = f(b) - \cancel{f(a)}\, f(a-0)$$

$$\mu((a,b)) = f(b) - f(a+0).$$

Упр

$$\boxed{\text{Утв: Объем в } \mathbb{R}^n,\ \text{Стилтьесовская длина} \Big\}\ \sigma\text{-аддитивны.}}$$

Александров: про меры в топологических пр-вах

X $\mathfrak{A}$ — полукольцо μ — мера (конечно адд.) на $\mathfrak{A}$.

Def: μ — регулярная:

$\forall A \in \mathfrak{A}$

- $\mu(A) = \inf\{\mu(G),\ G \in \mathfrak{A},\ G \text{ — открыто},\ G \supset A\}$
- $\mu(A) = \sup\{\mu(K),\ K \in \mathfrak{A},\ K \text{ — компакт},\ K \subset A\}$

Теорема: кон. аддитивн., регулярность $\Big\} \Rightarrow$ σ-аддитивность.

Док-во: $\{A_i\}$ — дизъюнктные, $\cup A_i = A$

$A_i,\ A \in \mathfrak{A}$

? $\sum\limits_1^\infty \mu(A_i) = \mu(A)$

$\leq$

$\geq$

$\bigcup\limits_1^n A_i \subset A \to \mu\left(\bigcup\limits_1^n A_i\right) \leq \mu(A)$

$\sum\limits_1^n \mu(A_i) \leq$

Нужно доказать:

? $\sum \mu(A_i) \geq \mu(A)$

$\sum \mu(A_i) \geq \mu(A) - 4\varepsilon.$

1) $K \subset A,\ K \in \mathfrak{A},\ \mu(K) > \mu(A) - \varepsilon.$

$\sum\limits_1^\infty \mu(A_i) > \mu(K) - 3\varepsilon.$

$\forall A_i\ \ G_i \in \mathfrak{A};\ \mu(G_i) > \mu(A_i) + \frac{\varepsilon}{2^i}$

$\cup A_i \supset K \Rightarrow \bigcup\limits_{i=1}^\infty G_i \supset K$

$\exists\ i_1, \ldots, i_N: \bigcup_{j=1}^{N} G_{i_j} \supset K$

$$\mu(K) \le \mu\Big(\bigcup_{j=1}^{N} G_{i_j}\Big) \le \sum \mu(G_{i_j}) \le$$

$$\overset{\mathrm{VI}}{\mu(A)-\varepsilon} \qquad \le \sum \mu(A_i) + \varepsilon.$$

σ-аддитивные структуры:

$\mathfrak{A}$ - алгебра: $\emptyset \in \mathfrak{A}$, $\mathfrak{X} \in \mathfrak{A}$

$\{A_i\}_1^\infty \subset \mathfrak{A} \Rightarrow \bigcup_1^\infty A_i,\ \bigcap_1^\infty A_i \in \mathfrak{A}$,

$A \in \mathfrak{A} \Rightarrow X \setminus A \in \mathfrak{A}$.

Пример: $\mathfrak{X}$ $2^{\mathfrak{X}}$

Замечание: $\{\mathfrak{A}_j\}_{j \in J}$ - σ-алгебра.

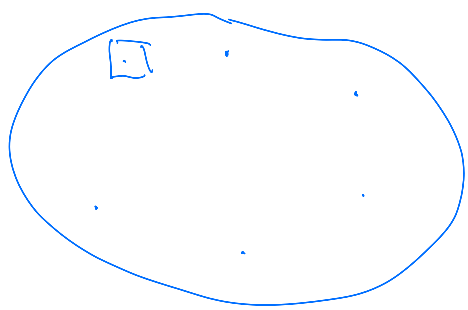
$\Rightarrow \bigcap \mathfrak{A}_j$ - σ-алгебра.

Порожденная σ-алгебра:

$\mathfrak{L} \subset 2^{\mathfrak{X}}$: $\overline{\mathfrak{L}}$ - наименьшая σ-алгебра, содержит $\mathfrak{S}$.

Что получается если взять $\mathfrak{S} = P(\mathbb{R})$?

$\mathfrak{S} = P(\mathbb{R}^n)$



Открытые, замкнутые

F_σ, G_δ.

Опред. $F \in \mathcal{F}_\sigma$ если $\exists \{F_n\}$, F_n - замкнуто
$F = \bigcup F_n$.

$G \in \mathcal{G}_\delta$ если $\exists \{G_n\}$, G_n - открыто
$\bigcap G_n = G$.

Свойство: $\mathfrak{A}$ - алгебра. $\{E_n\}_1^\infty \subset \mathfrak{A} \Rightarrow$

$\Rightarrow \bigcap\limits_1^\infty E_n \subset \mathfrak{A}$.

$\Rightarrow \mathfrak{A}$ - σ-алгебра.

Надо: $\{D_n\} \subset \mathfrak{A} \Rightarrow \bigcup D_n \in \mathfrak{A}$.

- дополнение.

Д-во: $\bigcup D_n = X \setminus \left(\bigcap\limits_1 D_n^c\right)$

$\mathfrak{A}$ - алгебра, ($E_i \supset E_{i+1}$, $E_i \in \mathfrak{A} \Rightarrow$
$\Rightarrow \bigcap E_i \in \mathfrak{A}$)
$\Rightarrow$ $\mathfrak{A}$ - σ-алгебра

[$\mathfrak{A}$ - алгебра, ($A_i \subset A_{i+1}$, $A_i \in \mathfrak{A} \Rightarrow \bigcup A_i \in \mathfrak{A}$)]
$\Rightarrow$ $\mathfrak{A}$ - σ-алгебра.

Важный промеж. шаг.

Внешняя мера.

Дано: $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{A}$ - полукольцо, μ - мера на $\mathfrak{A}$
(счётно аддитивная)

$$A \subset \mathfrak{X}, \quad \mu^*(A) = \inf\Big\{\sum_1^\infty \mu(A_i),\ A_i \in \mathfrak{A},\ \bigcup A_i \supset A\Big\}$$

Св-во:

$$A \in \mathfrak{A}, \quad \mu(A) \geq \mu^*(A)$$

Нер-во может быть строгим:

Для такой величины привести пример строгого нер-ва.

Свойства внешней меры μ^*

1) Монотонность $A \subset B$

$$\mu^*(A) \le \mu^*(B)$$

2) Счётная полуаддитивность:

$\{A_i\}$, $\bigcup A_i \supset A$

$$\Rightarrow \mu^*(A) \le \sum_i \mu^*(A_i)$$

Док-во: Будем доказывать

$$\mu^*(A) \le \sum_i \mu^*(A_i) + \varepsilon \qquad \forall \varepsilon > 0$$

i $\{B_j^{(i)}\} \subset \mathfrak{A}$: $\bigcup_j B_j^{(i)} \supset A_i$

$$\sum_j \mu(B_j^{(i)}) \le \mu^*(A_i) + \frac{\varepsilon}{2^i}$$

$\{B_{ij}\}$ — покрытие A

$$\underset{\mu^*(A)}{\underset{\vee\!|}{\sum_{ij} \mu(B_{ij})}} \le \sum \mu(A_i) + \varepsilon.$$

3). Пусть μ – σ-аддитивна $\mathfrak{A}$.

$$A \in \mathfrak{A} \Rightarrow \mu(A) = \mu^*(A)$$

Док-во: Вспомогат. ф-ция:

$A \subset \mathfrak{X}$,

$$\bar{\mu}(A) = \inf \{ \sum \mu(A_j),\ A_j \in \mathfrak{A},\ \cup A_j \supset A,\ A_i \cap A_j = \emptyset,\ i \neq j \}$$

Утв.: $\bar{\mu}(A) = \mu^*(A)$

$\geq$

Д-во: $\le$

$$\bar{\mu}(A) \le \mu^*(A) + \varepsilon$$

$\{A_i\}$, $A_i \in \mathfrak{A}$; $\cup A_i \supset A$

$$\sum \mu(A_i) \le \mu^*(A) + \varepsilon.$$

$B_1 = A_1$, $B_2 = A_2 \setminus A_1$.

$$\bigcup_{1}^{n_2^n} C_i^{(2)}$$

$$B_2 = A_3 \setminus (A_1 \cup A_2)$$

$$B_n = A_n \setminus \left(\bigcup_1^{n-1} A_i\right) = \bigcup^{N_n} C_k^{(n)}$$

$$\bar\mu(A) \le \sum_{i,j} \mu\left(C_j^{(i)}\right) \le \mu^*(A) + \varepsilon.$$

Осталось:

$A \in \mathfrak{M}$, μ-продолжение

то

$$\bar\mu(A) = \mu(A).$$

1) $\bar\mu(A) \le \mu(A)$

2) $\mu(A) \le \bar\mu(A) + \varepsilon,$

$\{A_i\}_1^\infty$: $A_i \cap A_j = \varnothing$; $\bigcup A_i \supset A$

$$\sum \mu(A_i) \le \bar\mu(A) + \varepsilon.$$

$$\mu(A) = \sum_i \mu(A \cap A_i) \le \sum \mu(A_i) \le$$

$$\le \bar\mu(A) + \varepsilon$$

Def: **Предмера:** $\mathfrak{X}$ $\quad \gamma : 2^{\mathfrak{X}} \to \overline{\mathbb{R}}_+$

γ - предмера, если:

1) $\gamma(\emptyset) = 0$

2) $A \subset B \Rightarrow \gamma(A) \leq \gamma(B)$

3) γ - σ-полуаддитивна $\{A_i\}$

$$\gamma(\cup A_i) \leq \sum \gamma(A_i).$$

Ключевое определение:

$E \subset \mathfrak{X}$ $\quad \gamma$ - измеримое, если

для любого $A \subset \mathfrak{X}$

$$\boxed{\gamma(A) = \gamma(A \cap E) + \gamma(A \setminus E)}$$

$$\gamma(A) = \gamma(A \cap E) + \gamma(A \cap E^c)$$

Теорема Лебега-Каратеодори

Дано: $\mathfrak{X}$, $\gamma : \mathfrak{X} \to \overline{\mathbb{R}}^+$ - предмера

Пусть Σ - всех γ измеримых мн-в

Тогда:

1. Σ – σ-алгебра.

2. $\gamma\Big|_{\Sigma}$ – σ-аддитивная мера

3. $\mathfrak{A}$ – полукольцо, μ – конечно аддитивная мера.

$\mu^* = \gamma \qquad \Sigma \supset \mathfrak{A} \qquad \mu^*(A) = \mu(A)$, при $A \in \mathfrak{A}$.

Резюме: (Вся схема)

Исходный пункт: $\mathfrak{A}$, μ. полукольцо, конечная аддитивность.

Шаг #1 $\quad \mu \to \mu^*$ – определена на всех $A \subset \mathfrak{X}$

(полуаддитивность)

Шаг #2 Выбираем $\Sigma \subset 2^{\mathfrak{X}}$ так что

Σ – σ-алгебра, $\Sigma \supset \mathfrak{A}$.

$\mu^*\Big|_{\Sigma}$ – σ-аддитивна,

$A \in \mathfrak{A}$, $\mu^*(A) = \mu(A)$.

Как устроены измеримые множ.

$\mathfrak{A}$.