План:

1. Напоминание о конструкции.
2. Проверка того, что Σ - является алгеброй.
3. Проверка того, что Σ является σ-алгеброй.
4. Внешняя мера σ-аддитивна на Σ.
5. Для внешней меры $\mathfrak{A} \subset \Sigma$
6. Пример Мера Лебега.
7. Борелевские множества.
8. Множества меры ноль.
9. $\exists$ много не борелевских измеримых множеств.
10. Структура измеримых множеств
11. Единственность продолжения меры.
12. Опять мера Лебега на прямой и окружности.

Инвариантность относительно сдвигов.

13. Единственность меры Лебега
14. Диадическое компакт.
15. Инструмент: покрытия системами кубов. —

Нулевая мера.

Мы дошли до этого места.

* * *

16. Измеримость отображения $f:(\mathfrak{X},\Sigma)\to(\mathcal{Y},\Omega)$. алгебра прообразов
17. Измеримость по Борелю.
18. Липшицевский гомеоморфизм сохраняет меру 0.
19. Преобразование меры Лебега при линейном

отображений.

20. Мера Лебега регулярна

* * *

21. Идея построения интеграла Лебега.

22. Измеримые функции. Множества Лебега ф-ции. В обратную сторону.

23. Малая теорема Леви.

24. Почти всюду.

25. В малой теореме Леви можно требовать почти всюду

26. Операции сохраняющие измеримость.
    - Арифметика
    - Счётные операции

Напоминание..

$\mathcal{X}$ $\mathfrak{A}$ - μ - конечно аддитивной.

- Внешняя μ^*:
$$\left.\begin{array}{l} \mu^*(\varnothing)=0, \\ A\subset B \Rightarrow \mu^*(A)\le \mu(B) \\ A=\bigcup A_i \Rightarrow \\ \qquad \mu^*(A)\le \sum_i \mu^*(A_i) \end{array}\right\}$$

Имеет смысл $\forall A\subset \mathcal{X}$.

Предмера: $\gamma : 2^{\mathfrak{X}} \to \bar{\mathbb{R}}^{+}$ $\}$.

$\Sigma \subset 2^{\mathfrak{X}}$ измеримых отн. γ.

$E \subset \mathfrak{X}$ – измеримо если

$$\forall A \subset \mathfrak{X} \quad \gamma(A) = \gamma(A \cap E) + \underset{\gamma(A \cap E^{c})}{\gamma(A \setminus E)}.$$

Σ – все измеримые мн-ва.

Теорема Лебега Каратеодори.

Утв. 1. Σ – σ-алгебра, $\mathfrak{A} \subset \Sigma$

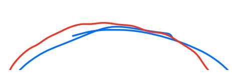
2. μ продолж. с $\mathfrak{A}$ до σ-аддитивной меры

Шаг 1 Σ – просто алгебра.

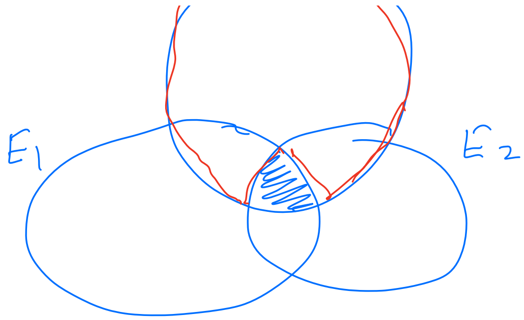
• Дополнения: $E \in \Sigma \Rightarrow E^{c} \in \Sigma$.

$\emptyset, \mathfrak{X} \subset \Sigma$

Надо: • $E_1, E_2 \in \Sigma \overset{?}{\Longrightarrow} E_1 \cap E_2 \in \Sigma$.

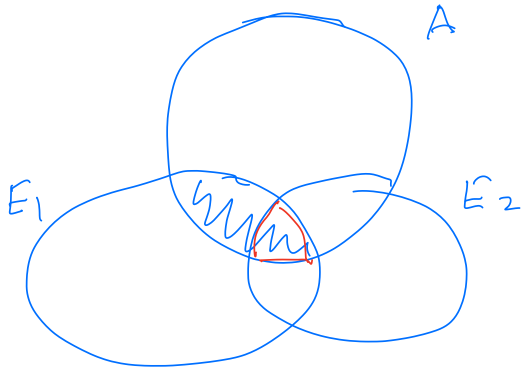


A



$$\gamma(A) = \gamma(A \cap (E_1 \cap E_2)) + \gamma(A \setminus (E_1 \cap E_2))$$

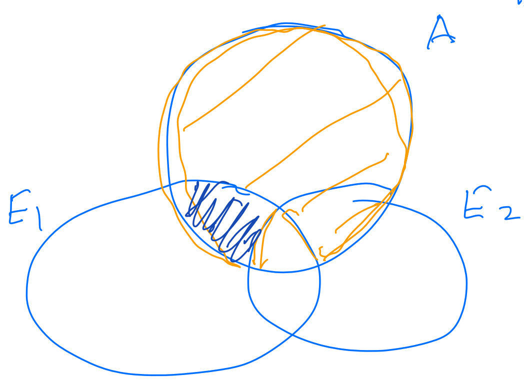
(1) $\gamma(A) = \gamma(A \cap E_1) + \gamma(A \setminus E_1)$



$\gamma(A \cap E_1) =$ (1)

$$= \gamma(A \cap E_1 \cap E_2) + \gamma((A \cap E_1) \setminus E_2)$$

$$\gamma(A) = \gamma(A \cap E_1 \cap E_2) + \underbrace{\gamma(A \setminus E_1) + \gamma((A \cap E_1) \setminus E_2)}_{= \, \gamma(A \setminus (E_1 \cap E_2)) \, =}$$



Напишите ф-лу

$\blacksquare$

Шаг 2 $\quad \gamma\big|_{\Sigma}$ — аддитивно.

$$E_1, E_2 \in \Sigma, \quad E_1 \cap E_2 = \emptyset$$

$$\gamma(E_1 \cup E_2) = \gamma(E_1) + \gamma(E_2).$$

$$A = E_1 \cup E_2 \qquad E_1 = A \cap E_1, \quad E_2 = A \cap E_2$$

Σ: — σ-алгебра и σ-аддитивность.

Утв: Σ — σ-алгебра:

Нужно:

$$\{E_i\} \subset \Sigma, \quad E_i \cap E_j \overset{?}{\Longrightarrow} \underbrace{\bigcup E_i}_{-\,E} \in \Sigma$$

i.e. $\quad A \subset \mathfrak{X}$

$$\gamma(A) \overset{?}{=} \gamma(A \cap E) + \gamma(A \setminus E)$$

полуадд. $\Rightarrow$ $\le$ $\quad \underline{\underline{\ge}}$

$$\gamma(A) = \underbrace{\gamma\Big(A \cap \bigcup_{1}^{n} E_k\Big)}_{} + \gamma\Big(A \setminus \bigcup_{1}^{n} E_k\Big) \quad (*)$$

$$\gamma\Big(A \setminus \bigcup_{1}^{n} E_k\Big) \ge \gamma(A \setminus E)$$

Можно считать $\gamma(A) < \infty$

Докажем что

$$\gamma\left(A \cap \bigcup_{1}^{n} E_k\right) = \sum_{1}^{n} \gamma(A \cap E_k)$$

Пусть доказано.

$$(1) \Rightarrow \gamma(\bar{A}) \geq \sum_{1}^{n} \gamma(A \cap E_k) + \gamma(A \setminus E)$$

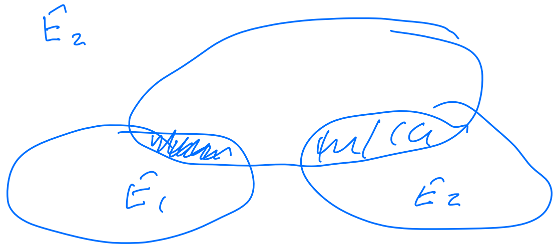
$$\Rightarrow \sum_{1}^{\infty} \gamma(A \cap E_k) < \infty,$$

$$\underline{\gamma(\bar{A})} \geq \underbrace{\sum_{1}^{\infty} \gamma(A \cap E_k)}_{\substack{\vee\!/ \\ \gamma(A \setminus \cup E_k)}} + \underline{\gamma(A \setminus E)}$$

Осталось доказать:

$$\gamma\left(A \cap \left(\bigcup_{1}^{n} E_k\right)\right) = \sum \gamma(A \cap E_k).$$

$E_1 \quad E_2$



$$B = A \cap (E_1 \cup E_2)$$

$$\gamma(B) = \gamma(B \cap E_1) + \gamma(B \setminus E_1)$$

Повторение: $E = \bigsqcup E_i, \quad A \subset X$.

$$\gamma(A) \overset{?}{=} \gamma(A \cap E) + \gamma(A \setminus E)$$

$\geq$

Имеем: $\gamma(A) = \underline{\gamma(A \cap \bigcup_1^n E_k)} + \gamma(A \setminus \bigcup_1^n E_k)$

$$\sum_1^n \gamma(A \cap E_i) \qquad\qquad \gamma(A \setminus \bigcup_1^\infty E_k)$$

$$\gamma(A) \geq \sum_1^\infty \gamma(A \cap E_i) + \gamma(A \setminus E)$$

$$\sum_1^\infty \gamma(A \cap E_i) \geq \gamma(A \cap E).$$

Σ — σ-алгебра:

Утв.: $\gamma\big|_\Sigma$ — σ-аддитивна.

$\{E_i\} \subset \Sigma, \quad E_i \cap E_j = \emptyset \quad E = \bigcup E_i \in \Sigma$

$$\sum_1^\infty \gamma(E_i) = \gamma(E)$$

$\geq$

$\leq$

$$\gamma(E) = \gamma(E \cap (E_1 \cup E_2 \cup \ldots \cup E_n)) +$$

$$+\gamma(E\setminus(E_1\cup E_2\cdots\cup E_n))$$

$$\gamma(E)\ge\gamma(E\cap(E_1\cup E_2\cup\dots\cup E_n))$$
$$=\sum_1^n\gamma(E_i)$$

У нас:

$\mathfrak{X}$, $\mathfrak{A}$, μ^*

Σ – σ-алгебра измеримых множеств.

Хотим доказать:

1) $\mathfrak{A}\subset\Sigma$.

Уже доказано → 2) Если дополнительно μ σ-аддитивна на $\mathfrak{A}$, то $\mu^*|_{\mathfrak{A}}=\mu|_{\mathfrak{A}}$.

Доказываем 1): $E\in\mathfrak{A}\Rightarrow E\in\Sigma$.

Надо: $\mu^*(A)=\mu^*(A\cap E)+\mu^*(A\setminus E)$, $\forall A\subset\mathfrak{X}$.

$\le$

Можно считать $\mu^*(A)<\infty$.

$$\mu^*(A)+\varepsilon\ge\mu^*(A\cap E)+\mu^*(A\setminus E)$$

$\{C_i\}_1^n\subset\mathfrak{A}$ $\quad\cup C_i\supset A$,

$$\sum\mu(C_j)\le\mu^*(A)+\varepsilon.$$

$$\mu^*(A\cap E)\le\mu((\cup C_j)\cap E)$$

$$\bigcup C_j \setminus E \supset A \setminus E$$

$$\underline{\mu(\bigcup C_j)} = \mu((\bigcup C_j) \cap E) +$$

$$\overset{\wedge}{\mu^*(A) + \varepsilon} \qquad + \mu((\bigcup C_j) \setminus E) \geq$$

$$\geq \mu(A \cap E) + \mu(A \setminus E)$$

$$\bigcup C_j \setminus E = \bigcup_j (C_j \setminus E)$$

$$\forall j \quad C_j \setminus E = \bigcup_{i=1}^{n_j} D_i^{(j)}, \quad D_i^{(j)} \in \mathfrak{A}.$$

$$\bigcup C_j \setminus E = \bigcup_{i,j} D_i^{(j)} =$$

$$\cancel{\sum \mu(A \setminus E)}$$

$$\sum \mu(C_i$$

$$\sum \mu(\bigcup C_j)$$

$$\underline{\mu^*(A \cap E) + \mu(A \setminus E)} \leq$$

$$\leq \mu^*((\bigcup C_j \cap E) + \mu^*(\bigcup C_j \setminus E) \leq$$

$$\sum_j \mu^*(C_j \cap E) + \mu^*\Big(\bigcup_j (C_j \setminus E)\Big) \le$$

$$\le \sum \mu^*(C_j \cap E) \le$$

$$C_j \setminus E = \bigcup_i^{n_j} D_i^j$$

$$\le \sum_j \underbrace{\Big[\mu^*(C_j \cap E) + \sum_i \mu^*(D_i^j)\Big]}_{} $$

$$\sum_j \mu^*(C_j) \le \mu^*(A) + \varepsilon.$$

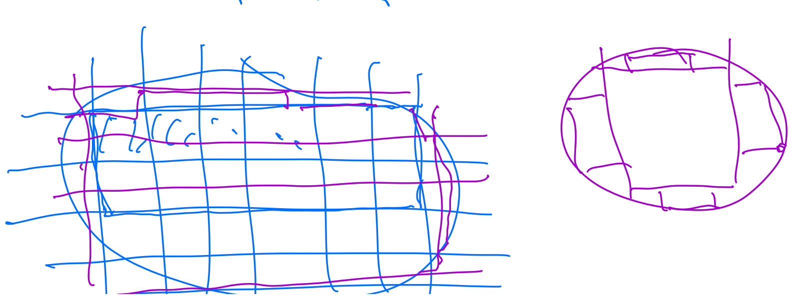
<u>Пример.</u> <u>Лебега.</u>

$\mathbb{R}, \quad \mathbb{R}^n \quad \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$

<u>Вопрос</u> Куда ее можно продолжить?

$\mathcal{B} = \overline{\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)}$ — борелевская.

$G \subset \mathbb{R}^n$ — открыто, то $G \in \mathcal{B}$.



F_σ, G_δ

Утв.: $\operatorname{card} \mathcal{B}$ = континуум.

Вопрос: Это не все измеримые мн-ва.

Утв. 1 $E \in \Sigma$, $\gamma(E) = 0$

$\Rightarrow E_1 \subset E \Rightarrow E_1 \in \Sigma$, $\gamma(E_1) = 0$

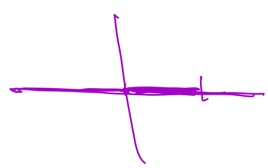
$$A \subset \mathfrak{X} \qquad \gamma(A) = \underbrace{\gamma(A \cap E_1)}_{=0} + \gamma(A \setminus E_1)$$

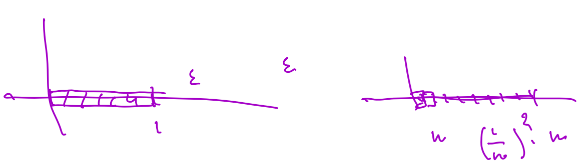
$$\geq$$

$$\gamma(A) = \underbrace{\gamma(A \cap E)}_{=0} + \gamma(A \setminus E)$$

$$\gamma(A \setminus E_1) \geq \gamma(A \setminus E).$$

Примеры. $\mathbb{R}^n$ $\mathbb{R}^2$





Напоминание:

C

Утв.: $\operatorname{card} C$ = континуум

$C \subset \Sigma$

$\lambda(C) = 0$

~~Утверждение:~~ ~~λ~~ ~~$A \in \overline{\Sigma}$~~

~~Тогда~~ ~~$\exists\ B \in \mathfrak{B},\ E \subset \overline{\Sigma}:\ B \cap E = \emptyset$~~

~~$A = B \cup E,\quad \lambda(E) = 0.$~~

$A;$ $\quad \varepsilon \quad C_i \in P.\ \ \bigcup C_i \supset A$

$$C_i \cap C_j = \emptyset$$

$$\sum \mu(C_j) \le \mu^*(A) + \varepsilon,$$

$$\bigcup_{1}^{n} C_j = C_{\varepsilon}^{(\varepsilon)} \qquad \mu(C_{\varepsilon}^{(\varepsilon)}) = \sum \mu(C_j) \le$$

$$\le \mu^*(A) + \varepsilon.$$

$$D = \bigcap C^{(\varepsilon)} \in \mathfrak{B}.$$

$$\mu(D) = \lim_{\varepsilon \to 0} \mu(C^{\varepsilon}) = \mu^*(A)$$

$$D \supset A;$$

$$\underline{\mu(D)} = \mu(D \setminus A) + \underline{\mu(A)}$$

$$\mu(D \setminus A) = 0.$$

Утв.: $\forall A \in \overline{\Sigma}\quad \exists E \in \overline{\Sigma},\ \mu(E) = 0$

и $\mu^*(A) < \infty$ $\quad A \cup E$ – борелевское мн-во

$\lambda \quad P(R) \quad \mathfrak{B} \quad \overline{\Sigma}$

Насколько это существ. единст.

$$\mathcal{B} \subset \underset{\text{σ-алгебра}}{\mathcal{G}} \subset \Sigma$$

ν – σ-аддитивная на $\mathcal{G}$

$\nu|_{\mathcal{B}} = \lambda|_{\mathcal{B}}$ но $\nu|_{\mathcal{G}} \neq \lambda|_{\mathcal{G}}$.

Мера на $\mathfrak{A}$ – σ-конечной, если

$$X = \bigcup A_n, \quad A_n \in \mathfrak{A}, \quad \mu(A_n) < \infty.$$

$$\boxed{\text{Тогда если } A \in \Sigma, \text{ то } \exists E \in \Sigma, \ \mu(E) = 0, \ A \cup E \in \overline{\mathfrak{A}}.}$$

$\Rightarrow$ продолжение меры Лебега единственно

Если: $P(\mathbb{R})$, Σ λ – Лебега на Σ

и $\underset{\text{σ-алгебра}}{\mathcal{G}} \subset \Sigma$ $\quad \underset{\text{счётно аддитивная}}{\nu : \mathcal{G} \to \mathbb{R}^+}$

такая что $\nu|_{\mathcal{B}} = \lambda|_{\mathcal{B}}$.

$\Rightarrow \nu|_{\mathcal{G}} = \lambda|_{\mathcal{G}}$.

Д-во: Шаг 1

$\nu(E) = 0 \Leftrightarrow \lambda(E) = 0$.

Шаг 2 $\quad A \subset \mathcal{G} \quad E : \nu(E) = 0, \ \lambda(E) = 0$

$A \cup E \subset \mathcal{B}$.

$\lambda(A) = \nu(A)$

Свойства меры Лебега:

$E \in \Sigma$, $r \in R$ $\quad E + r = \{x+r,\ x \in E\}$

Докажите: $\lambda(E+r) = \lambda(E)$.

Утв. Пусть μ − σ-аддитивная мера на $\mathcal{B}$.

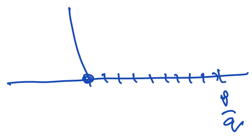
$$\mu(E+r) = \mu(E) \quad \forall E.$$

$\Rightarrow \mu = c\lambda$, $\quad c > 0$.

Д-во: $c = \mu((0,1])$.

$\mu(a,b) = c(b-a)$

$b - a = \frac{p}{q}$. $\quad a = 0$ $\quad p \quad \frac{1}{q}$.



$$\mu(0, \tfrac{1}{q}) = \frac{c}{q}.$$

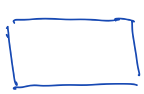
$\mu((0,1]) = c$

$(0,1] =$ 

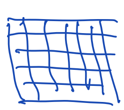
$c = q \sum \mu((0,\frac{1}{q}]) \Rightarrow \mu(0,\frac{1}{q}) = \frac{c}{q}$.

$[a,b) = b - a = \frac{p}{q}$

$\mu([a,b)) = c\,\frac{p}{q}$.

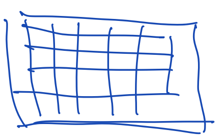


$\mu((0,1]\times(0,1]) = c$



n^2 $\quad \mu((0,\frac{1}{n})\times(0,\frac{1}{n})) = \frac{c}{n^2}$

t/q



$\frac{p}{q} \quad t \times p \quad \frac{1}{q}$.

$$\mu\left(\left(0, \frac{p}{q}\right) \times \left(0, \frac{t}{q}\right)\right) = \frac{pt}{q^2} =$$

$$= \frac{p}{q} \cdot \frac{t}{q} \quad c.$$