$\mathfrak{X}$ $\quad \mathfrak{A} \subset 2^{\mathfrak{X}}, \quad \mu : \mathfrak{A} \to \overline{\mathbb{R}}_+$

Мы умеем

1. $\Sigma \supset \mathfrak{A}$ σ-алгебра.
2. Продолжить меру до σ-адд. на $\mathfrak{A}$.
3. Единственно.
4. Если $\mu|_{\mathfrak{A}}$ – σ-аддитивно $\Rightarrow$ продолж. совп. с исходной на $\mathfrak{A}$.

$(\mathfrak{X}, \Sigma, \mu)$

Опр. 1 $\quad (\mathfrak{X}, \Sigma, \mu) \quad (\mathcal{Y}, \mathfrak{S}, \nu)$

$f : \mathfrak{X} \to \mathcal{Y}$. $\quad$ $f$ – измеримо

Если $\forall A \in \mathfrak{S}$, $f^{-1}(A) \in \Sigma$.

Пример #1 $\quad \mathfrak{X}, \mathcal{Y}$ – тополог. пр-ва.

$\mathcal{B}(\mathfrak{X}), \mathcal{B}(\mathcal{Y})$ – Борелевские алг.

$f : \mathfrak{X} \to \mathcal{Y}$ – непрерывно $\Rightarrow$ измеримо по Борелю.

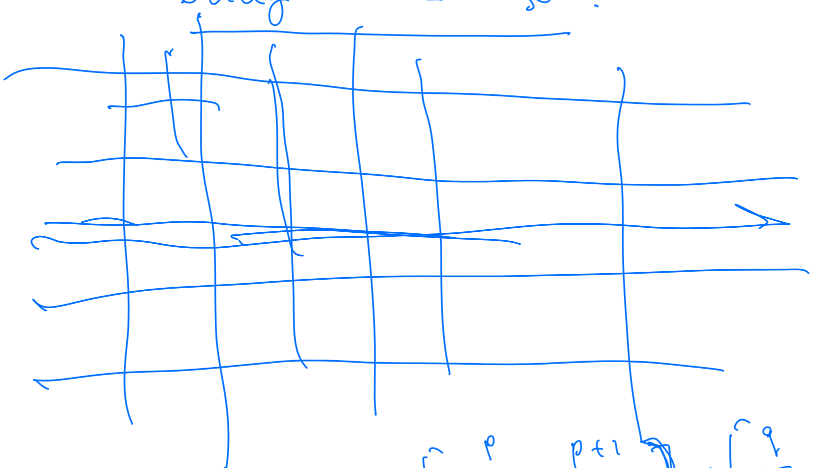
Как проверять измеримость?

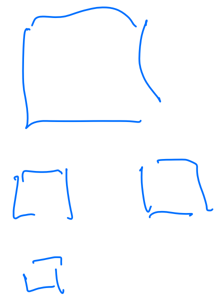
$(\mathcal{Y}, \overline{\mathfrak{S}})$ $\quad \mathfrak{B} \subset 2^{\mathcal{Y}}$, $\mathfrak{B} = \mathfrak{S} \Rightarrow$

$\Rightarrow \mathfrak{B}'$ – обр. мн-во в $\mathfrak{S}$.

<u>Пример:</u> $\mathcal{X} = \mathbb{R}^n$, $\Sigma = \mathcal{B}(\mathcal{X})$.

<u>Диадические кубы:</u>



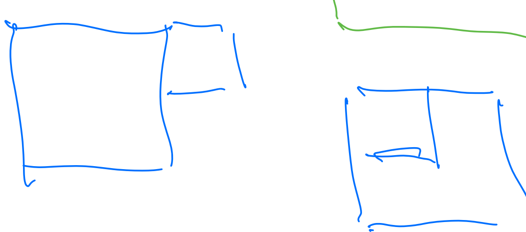


$$\left[\frac{p}{2^n}, \frac{p+1}{2^n}\right) \times \left[\frac{q}{2^n}, \frac{q+1}{2^n}\right).$$

$\exists \mathcal{D}$ $\quad \forall G \subset \mathbb{R}^n$, $G$ – открыто

$$G = \bigcup_{Q_j \in \mathcal{D}} Q_j, \quad Q_i \cap Q_j = \emptyset, \; i \neq j$$

с точностью до границы



<u>Утв:</u> $f : G_1 \to G_2 \subset \mathbb{R}^n$

гомеоморфизм.

$$A \in \mathcal{B}(G_2) \Rightarrow f^{-1}(A) \in \mathcal{B}(G_1)$$

Вопрос: $B \in \Sigma_\lambda$, $B \subset G_1$.

$$f(B) \overset{?}{\in} \Sigma_\lambda$$

$G_1, G_2 \subset \mathbb{R}^n$.

Утв: $f : G_1 \to G$ — гомеоморфизм.

и дополн. $f \in Lip$

$B \subset \Sigma_\lambda$, $B \subset G_1 \Rightarrow f(B)$ — тоже Лебегово.

Д-во: $B = \tilde{B} \setminus E$

$\tilde{B} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, $mes(E) = 0$,

$$f(B) = f(\tilde{B}) \setminus f(E) \ ?$$

борелевск.

$$\boxed{\lambda(f(E)) = 0}$$

$$\lambda(E) = 0 \Rightarrow \lambda^*(E) = 0$$

$$\Rightarrow \exists \{Q_j\} \subset D : \ \bigcup Q_j \supset E$$

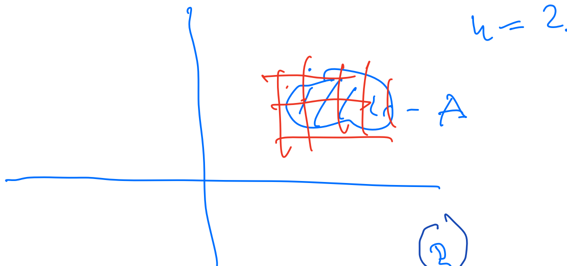
$$\sum_j (\operatorname{diam} Q_j)^n < \varepsilon$$

$$f(E) \subset \bigcup_j f(Q_j)$$

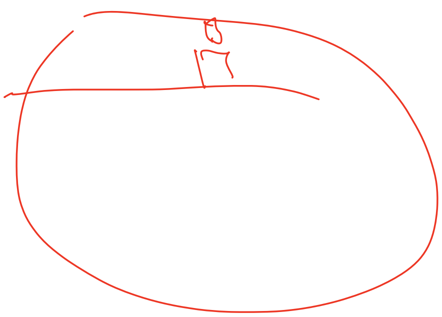
$$\operatorname{diam} f(Q_j) \le C(\operatorname{diam} Q_j)$$

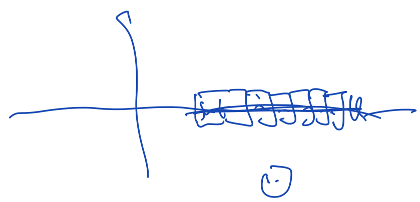
$$\Rightarrow \lambda^*(f(E)) \le \text{Const} \cdot \varepsilon.$$

Отступление:

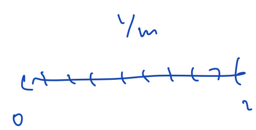



$A \subset \bigcup Q_j$, $\sum (\operatorname{diam} Q_j)^2 < \infty.$





$\sum \operatorname{diam} Q_j < \infty.$




(Хаусдорфова размерность)

$B \subset \mathbb{R}^n$

$s$ : $\exists Q_j$ :

1) $B \subset \bigcup Q_j$

$n \left(\frac{1}{n}\right)^s$

$\forall \varepsilon \ \exists Q_j$

$\bigcup Q_j \supset B$

2) $\sum (\operatorname{diam} Q_j)^s < \infty$. $\Leftarrow$ $\bigcup \operatorname{diam} Q_j < \varepsilon$.

$\inf\{s : \exists$ такое разбиение $\} = \dim_H (B)$.

$s_0 = \dim_H (B)$

Мера Хаусдорфа:

$$\mu_s(B) = \inf\{ \sum (\operatorname{diam} Q_j)^{s_0} : \bigcup_j Q \supset B \}.$$

Упр: $C \subset [0,1]$ — канпор. с $1/3$

$\dim_H (C) = \log 2 / \log 3$.

Основной объект:

$$f : (\mathfrak{X}, \Sigma, \mu) \to \mathbb{R} \qquad (\mathbb{C}).$$

$f : \mathfrak{X} \to \mathbb{R}$ $\qquad \leq \quad \geq$

$E_a(f) = \{x \in \mathfrak{X} : f(x) < a\}$.

Утв.: $f : \mathfrak{X} \to \mathbb{R}$ – измерима $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow E_a(f) \in \mathfrak{X} \quad \forall a.$

Очевидные св-ва.:

1) $f_1, f_2$ : $f_1 + f_2$, $f_1 \cdot f_2$ – измеримы.

измеримы

$\frac{f_1}{f_2} : \mathfrak{X} \cap \{x : f_2 \neq 0\} \to$

$\to \mathbb{R}.$

измерима.

Прим.: $\mathfrak{X}$ – метр. пр-во.

$f_2$ – непр.

Упр. Докажите пользуясь $E_a(f)$.

Другое док-во:

$$(x, y) \to x + y.$$

$$\mathfrak{X} \longrightarrow \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \to (f_1(x), f_2(x))$$

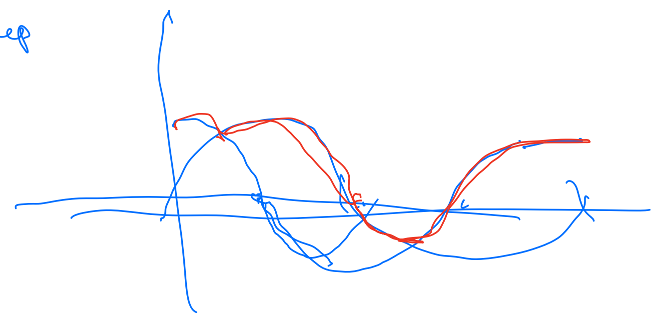
$$x \longrightarrow f_1(x) + f_2(x).$$

---

Бесконечные свойства:

$\{f_i(x)\}_{i=1}^{\infty}$ – измеримые:

$\Rightarrow \sup\limits_i \{f_i(x)\}$ – измер



D-во:

$$f(x) = \sup_i \{f_i(x)\}.$$

?

$a \in \mathbb{R}$; $\quad E_a(f) \in \Sigma$

$$x \in E_a(f): \left\| \begin{array}{l} \forall \varepsilon > 0 \quad \exists i: \quad f_i(x) > a - \varepsilon. \\ \forall i \quad f_i(x) \leq a. \end{array} \right.$$

$$x \in E_a(f)$$

$$x \in \bigcap_i \{x : f_i(x) \leq a\}.$$

---

$\inf\limits_i \{f_i\}$ – измеримая ф-ия

$\overline{\lim} f_i(x)$ – измеримая ф-ия

$$" \inf_m \sup_{k > m} \{f_i(x)\}$$

$\lim\limits_{i} f_i(x)$ – измерим если $\exists$.

---

$f : \mathfrak{X} \to \overline{\mathbb{R}}$ $\qquad f^{-1}(\infty) \in \Sigma_\lambda$

$\qquad\qquad\qquad\qquad f^{-1}(-\infty) \in \Sigma_\lambda$.

$*$ $\quad *$ $\quad *$

## Интеграл Лебега

Общая схема:

$$f : \mathfrak{X} \to \mathbb{R}.$$

1) $f = f_+ - f_-$

$$f_+(x) = \begin{cases} f(x) & f(x) \geq 0 \\ 0 & \text{в противном случае} \end{cases}$$

$$f_-(x) = \begin{cases} 0 & f(x) \leq 0 \\ -f(x) & -f(x) \leq 0. \end{cases}$$

2) Мы определили интеграл Лебега $J(f)$
$f \geq 0$.

Для произвольной $g = g_+ - g_-$

$J(g_+)$, $J(g_-)$ — определены,

если $J(g_+)$ или $J(g_-)$ $\neq \infty$

$$J(g) = J(g_+) - J(g_-).$$

<u>Цель:</u> $f : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$, $f \geq 0$

$J(f)$ — ?

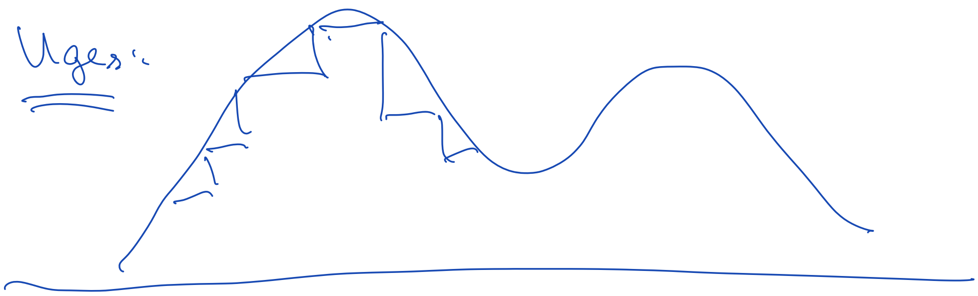
<u>Инструмент:</u> Простые функции:

$f : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ — простая

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k \chi_{E_k}(x)$$

**Для них:** $I(f) = \sum\limits_{i}^{n} a_k \mu(E_k)$

**Идея:**



**Дано:** $f : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ – измерима. $f \geq 0$

**Выберем** $\{g_i\}_{i=1}^{\infty}$ : $g_i$ – простые, $g_i \geq 0$

$$g_i(x) \nearrow f(x)$$

**Определение:** $J(f) = \lim\limits_{j \to \infty} I(g_j)$

---

**Шаг 1** Все это работает для простых ф-ций.

**Утв.:** $f$, $\{g_i\}$ – простые;

$f, g_i \geq 0$, $g_i(x) \leq g_{i+1}(x)$

$$g_i(x) \uparrow f(x)$$

$$\Rightarrow I(g_i) \uparrow I(f).$$

Д-во: ясно: $I(g_i) \uparrow$, $I(g_i) \le I(f)$.

$\geq$ : Предположим, че мера $< \infty$.

$\chi_{E_k}(x)$

$\chi_{\tilde{E}_k}(x)$

$$f(x) = \sum_k a_k \chi_{E_k}(x), \quad E_k \cap E_j = \emptyset$$

$$g_i(x) = \sum_{i=1}^{n_i} b_i \chi_{\tilde{E}_i}(x)$$

$$f(x) \chi_{E_k}(x) = a_k \chi_{E_k}(x).$$

$$g_i(x) = \sum_{j=1}^{n_i} b_j \chi_{\tilde{E}_j \cap E_k}(x).$$

$$\chi_{E_k}(x) g_i(x) \Big|_{E_k} \uparrow a :$$

$$I(\chi_{E_k}(x) g_i(x)) \xrightarrow[i \to \infty]{} a \mu(E_k)$$

$\leq$ – есть

? $\geq$

$$\lim_{i\to\infty} I\big(f_k(x)\, g_i(x)\big) \geq (a-\varepsilon)\,\mu(E_k)$$

$\forall\ \varepsilon > 0.$

$$I\big(f_k(x)\, g_i(x)\big) \geq (a-\varepsilon)\,\underbrace{\mu\{x \in E_k;\ g_i(x) > a-\varepsilon\}}_{?\ \downarrow\ \{i\to\infty\}\ \mu(E_k)}$$

<u>Док-во:</u>

$$\operatorname{mes}\{x \in E_k;\ \underline{\lim}\, g_i(x) < a\} = 0.$$

$$= \bigcap_{\varepsilon} \{x : \lim g_i(x) \leq a-\varepsilon\}.$$

$$\operatorname{mes}\{x : \lim g_i(x) < a-\varepsilon\} \to 0.$$

---

$\varepsilon$: $\operatorname{mes}\{x : g_i$

$$\operatorname{mes}\{x : \lim g_i(x) < a-\varepsilon\}.$$

Лемма: $g_i$, $f$ — простые ф-ии.

$g_i, f \geq 0.$

$\mu(X) < \infty$, $g_i(x) \uparrow f(x)$ п.в.

$\Rightarrow I(f) = \lim I(g_i)$.

Док-во:

1). $f = \sum_{k=1}^{n} a_k \chi_{E_k}$, $E_k \cap E_j = \emptyset$

$\forall k \in \{1, n\}$ $\chi_k g_i(x)$ $\chi_k(x) g_i(x) \xrightarrow[i\to\infty]{} a_k \chi_{E_k}(x)$

Докажем: $I(\chi_k g_i) \to I(a_k \chi_{E_k}) =$

$= a_k \mu(E_k)$.

$I(\chi_k g_i) \uparrow$ $i \uparrow$

$\chi_k g_i \leq a_k \chi_{E_k}$.

$\Rightarrow \lim_{i\to\infty} I(\chi_k g_i) \leq I(a_k \chi_{E_k}) = a_k \mu(E_k)$.

Надо доказать $\geq$.

Достаточно доказать.

$$\lim_i I(\chi_k g_i) \geq a_k \mu(E_k) - \varepsilon.$$

$$I(\chi_k g_i) \geq (a_k - \delta)\, \mu(\{x: g_i > a_k - \delta\} \cap E_k)$$

Нужно доказать что

$$\mu(\{x: g_i \cancel{<} a_k - \delta\} \cap E_k) \geq$$

$$\geq \mu(E_k) - \varepsilon$$

при дост. больших $i$,

$$(a_k - \delta)(\mu(E_k) - \varepsilon)$$

$$\mu(\{x: \lim_i g_i \cancel{<} a_k - \delta\}) \to 0 \qquad , \quad \delta \to 0.$$

$$\{x: \lim g_i(x) < a - \delta\}. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \{x,$$

$$\{x: \lim_i g_i(x) < a - \delta\}. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \{g_i(x) < a - \delta\} \text{ при всех } i.$$

Док-во:

1) $I(\chi_{E_k} g_i) \geq a_k \chi_{E_k}(x)$.

$$I(\chi_{E_k} g_i) \geq (a-\delta)\underbrace{\mu\{x: g_i\chi_{E_k} \geq a-\delta\}}.$$

Надо доказать что $\forall \delta > 0$,

$\mu\{x: g_i\chi_{E_k} < a-\delta\}$ — может быть сделано сколь угодно малым.

$$\{x: \lim g_i\chi_{E_k} < a-\delta\} \cap E_k\} \to 0$$

$$\delta \to 0.$$

$g_i \to f$ п.в. на $E_k$.

$$= \bigcap_{\delta>0} \{x: \lim g_i > a-\delta\} \cap E_k =$$

$$= E_k \setminus E_0 \quad - \mu(E_0) = 0$$

$$\Rightarrow \mu\{x: \lim g_i > a-\delta\} \to \mu(E_k)$$

$$\delta \to 0$$

$$\lim_i g_i(x) > a-\delta$$

$\exists\, n \quad g_i(x) > a-\delta \quad i > n.$

$$x \in \bigcap_{i>n} \{x : g_i(x) > a-\delta\}$$

$$\{x : \lim g_i(x) > a-\delta\} = \bigcup_n \underbrace{\bigcap_{i>n} \{x : g_i(x) > a-\delta\}}$$

$$\underbrace{\mu\{x : \lim g_i(x) > a-\delta\}} =$$

$$= \lim_n \bigcap_{i>n} \{x : g_i(x) > a-\delta\} =$$

$$\mu\{x : \lim_i g_i(x) > a-\delta\} =$$

$$= \mu\left(\bigcap_n \{x : g_n(x) > a-\delta\}\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \mu\{x : g_n(x) > a-\delta\}.$$

Выберем $\delta$:

$$\mu\{x : \lim_{i\to\infty} g_i(x) > a-\delta\} \geq$$

$$\geq \mu(E_k) - \varepsilon.$$

$n$: $\mu\{x : g_n(x) > a_k - \delta\} >$

$$> \mu\{x : \lim g_n(x) > a - \delta\} - \varepsilon.$$

$\mu\{x : g_n(x) > a_k - \delta\} >$

$$\geq \mu(E_k) - 2\varepsilon.$$

Соберем вместе.

Лемма: $f$, $g_i$ — простые ф-ции, $f, g_i \geq 0$. $g_i(x) \uparrow f$.

$\Rightarrow I(g_i) \uparrow I(f)$.

Док-во: $f = \sum a_k \chi_{E_k}(x)$

Можно считать $f = a_k \chi_{E_k}$

$g_i(x) \uparrow a_k \quad i \to \infty.$

Что. $\forall \varepsilon, \delta$ найдется $n$: 
$$\mu(\{x : g_n(x) > a_k - \delta\}) \geq$$
$$\geq \mu(E_k) - 2\varepsilon.$$

<u>Шаг 1</u> $\lim g_n(x) = a$ почти всюду.

$$\bigcap_{\delta>0} \{x : \lim g_n(x) > a-\delta\} =$$

$$= \{x : \lim g_n(x) = a\}.$$

$$\Rightarrow \quad \mu\{x : \lim g_n(x) > a-\delta\} \underset{\delta \to 0}{\longrightarrow} \mu(E_k)$$

$$\exists \delta : \quad \mu\{x : \lim g_n(x) > a-\delta\} \geq$$

$$\geq \mu(E_k) - \varepsilon,$$

$$\{x : \lim g_n(x) > a-\delta\} =$$

$$= \bigcap_n \{x : g_i(x) > a-\delta, \ i \geq n\}.$$

$$\mu(\{x : \lim g_n(x) > a-\delta\}) =$$

$$= \lim_n \mu\{x : g_i(x) > a-\delta; \ i \geq n\}$$

$\exists n$:

$$\mu\{x : g_i(x) > a-\delta, \ i \geq n\} \geq$$

$$\geq \mu(E_k) - 2\varepsilon,$$

Выберем $\delta$, т.ч.

$$I(f_n, g_i) \ge (a-\delta)\,\mu\{x : g_i(x) > a-\delta\}$$

$$\ge \underline{a\,\mu(E_n)} - \delta\,\mu\{\quad\} - \varepsilon(a-\delta)$$