Строим формулу Стокса в $\mathbb{R}^2$

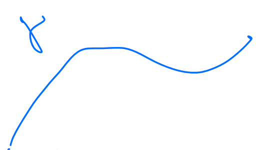
(пока не строго, но по возможности понятно)

Строительный материал:

1) Формула Ньютона-Лейбница $\int_a^b \varphi'(t)\,dt = \varphi(b) - \varphi(a)$ ✓

2) Понятие 1-формы: $\omega = f(x,y)\,dx + g(x,y)\,dy$

Главное свойство 1-форм: Их можно интегрировать вдоль кривых на плоскости



$\gamma(t) = \{ (x(t), y(t)),\ t \in [0,1] \} \Rightarrow$

$$\int_\gamma \omega = \int_0^1 f(x(t),y(t))\,\underbrace{x'(t)\,dt}_{dx} + g(x(t),y(t))\,\underbrace{y'(t)\,dt}$$

Считаем все кусочно гладкими чтобы не заморачиваться

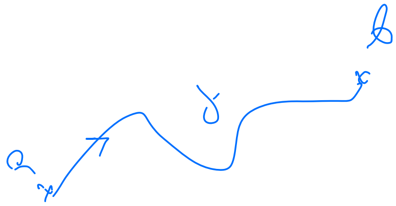
Пример 1-формы: (дифференциал)

$$F(x,y) \rightsquigarrow dF(x,y) = \frac{\partial F}{\partial x}\,dx + \frac{\partial F}{\partial y}\,dy.$$

В этом случае

$f(x,y)\,dx + g(x,y)\,dy = F_x\,dx + F_y\,dy \Rightarrow$

$\Rightarrow f_y = g_x$ — замкнутость.



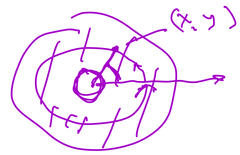
$$\int_\gamma dF = F(b) - F(a).$$

2

Упражнение: Не любая 1-форма является дифференциалом

Условие замкнутости для формы $\omega = f(x,y)\,dx + g(x,y)\,dy$ | $f_y = g_x$ замкнутость.

Пример когда нет

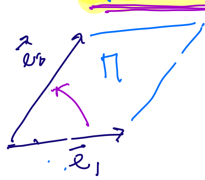


$F(x,y) = \arg(x,y)$

$\omega = dF = F_x\,dx + F_y\,dy.$

Упражнение: Придумать замкнутую 1-форму в  такой области, которая не является дифференциалом.

3) Понятие ориентированной площади

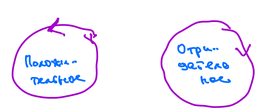


$$\vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2 = \begin{cases} + \text{Площадь } П \\ - \text{Площадь } П \end{cases}$$

против часовой стрелки

по часовой стрелки

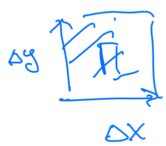
Вообще положительное направление — ПРОТИВ часовой стрелки



Свойство ориентированной площади

$$\vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2 = -\vec{e}_2 \wedge \vec{e}_1$$

Нужные нам примеры:



$\Delta x \wedge \Delta y$ = площадь Π

$\Delta y \wedge \Delta x$ = − площадь Π

$\Delta x \wedge \Delta x = 0$, $\Delta y \wedge \Delta y = 0$

Мы будем пользоваться этими соотношениями при переходе к бесконечно малым:

$$dx \wedge dy = -dy \wedge dx, \quad dx \wedge dx = 0, \quad dy \wedge dy = 0$$

Подумайте: что такое dx, dy, $f(x,y)\,dx + g(x,y)\,dy$.

$$\int_a^b f(x)\,dx \quad \sum \Delta_k f(\xi_k)$$

$$\int_\gamma \omega$$

0 - формы - функции $f(x,y)$

2 - формы: $\omega = a(x,y)\, dx \wedge dy$.

$\int_G \omega = \int_G a(x,y)\, dx\, dy$

$\omega = a(x,y)\, dy \wedge dx$

$\int_G \omega = -\int_G a(x,y)\, dx\, dy$

Действие происходит в какой-то области $G \subset \mathbb{R}^2$

$W^0(G)$ $W^1(G)$ $W^2(G)$ ← можно интегрировать на области.

0-формы 1-формы 2-формы.

Оператор дифференцирования:

$$W^0 \xrightarrow{d} W^1 \xrightarrow{d} W^2$$

$$f = f(x,y) \in W^0 \Rightarrow df = f_x\, dx + f_y\, dy \in W^1$$

$$\omega = f(x,y)\, dx + g(x,y)\, dy \in W^1 \Rightarrow$$

$$d\omega = df(x,y) \wedge dx + dg(x,y) \wedge dy = (f_x\, dx + f_y\, dy) \wedge dx + (g_x\, dx + g_y\, dy) \wedge dy =$$

↑ это определение

$= 0$ $= 0$

$$= f_x\, dx\wedge dx + f_y\, dy\wedge dx + g_x\, dx\wedge dy + g_y\, dy\wedge dy$$

$$f_y\, dy\wedge dx = -f_y\, dx\wedge dy$$

$$d\omega = \boxed{(g_x - f_y)\, dx\wedge dy} \in W^2$$

Упражнение:

$$\omega_1 = f_1\, dx + g_1\, dy \in W^1$$

$$\omega_2 = f_2\, dx + g_2\, dy$$

Как устроено $\omega_1 \wedge \omega_2 \in W^2$?

$$= (f_1 g_2 - f_2 g_1)\, dx\wedge dy$$

Главное свойство дифференцирования:

$$f \in W^0 \Rightarrow d\,d f = 0,$$

$$dF = \underbrace{F_x}_{f} dx + \underbrace{F_y}_{g} dy$$

$$g_x - f_y = 0$$

$$d^2 = 0$$

$$\omega = f\, dx + g\, dy,$$

$$g_x - f_y$$

$$d\omega = 0.$$

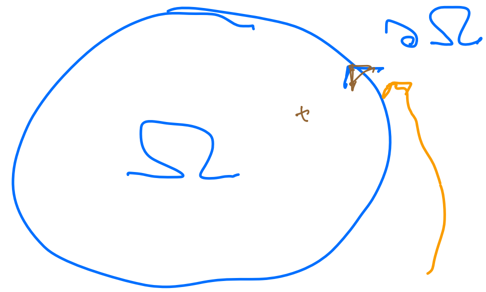
Короткое отступление

Нам это не потребуется, но хорошо бы привыкать к общим понятиям начиная с простых объектов и привыкать к словам.

$$0 \xrightarrow{d} W^0 \xrightarrow{d} W^1 \xrightarrow{d} W^2 \xrightarrow{d} 0\ ;$$

точные последовательности, замкнутые формы, границы, когомологии де Рама

Граница области



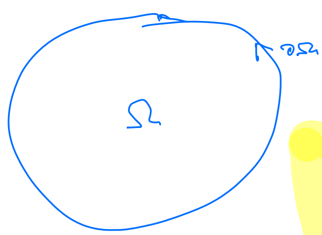
Положительное направление!

Область остаётся слева

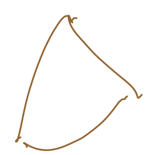
Наконец, формула Стокса:

$\Omega \subset R^2$, $\omega \in W^1$

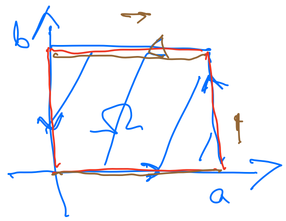
(Все кусочно гладкое)



$$\boxed{\int_{\Omega} d\omega = \int_{\partial\Omega} \omega}$$



Доказательство для прямоугольника:



$$\iint_{\Omega} d\omega = \int_{\partial\Omega} \omega$$

$$\omega(x,y) = f(x,y)\,dx + g(x,y)\,dy.$$

Правая часть.

$$\int_{\partial\Omega} \omega = \int_0^a f(x,0)\,dx + \int_0^b g(a,y)\,dy - \int_0^a f(x,b)\,dx - \int_0^b g(0,y)\,dy.$$

Левая часть.

$$d\omega = (-f_y + g_x)\,dx\wedge dy$$

$$\iint_{\Omega} d\omega = \iint_{\square} (-f_y + g_x)\,dx\wedge dy =$$

$$I_1 = -\int_0^a \underbrace{\int_0^b f_y\,dy}\,dx\ ; \quad I_2 = \int_0^b \underbrace{\int_0^a g_x\,dx}\,dy.$$

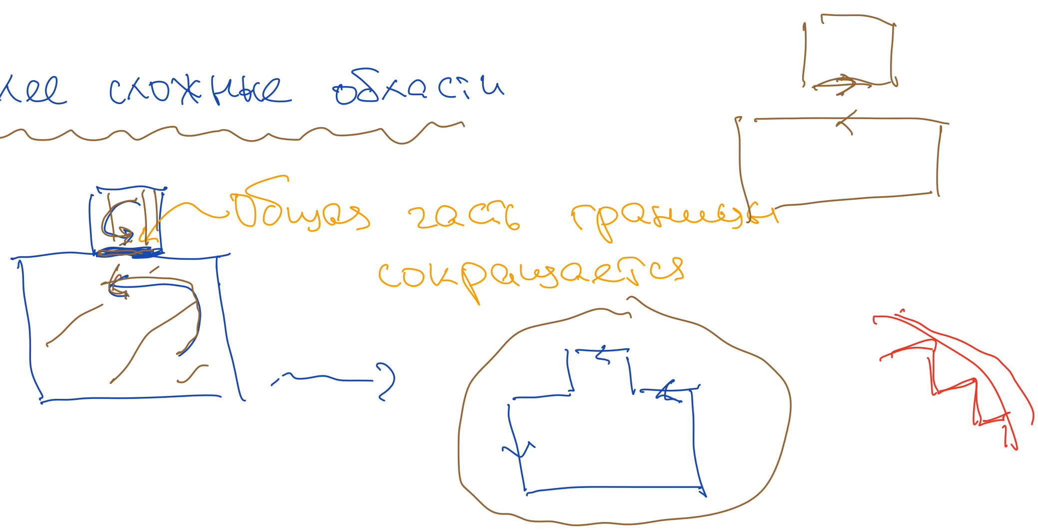
$$I_1 = -\int_0^a f(x,b)\,dx + \int_0^a f(x,0)\,dx$$

$$I_2 = \int_0^b g(a,y)\,dy - \int_0^b g(0,y)\,dy.$$

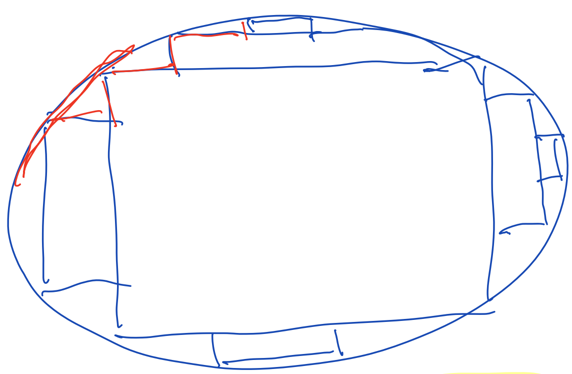
Мораль:

Стокс = Ньютон-Лейбниц в $d \geq 1$

Более сложные области



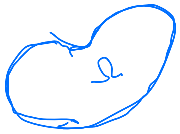
Еще более общие области:



Я пока опускаю техническую часть связанную с предельным переходом!

$$\boxed{\int_{\partial\Omega} f\,dx + g\,dy = \iint_{\Omega} (-f_y + g_x)\,dx\,dy}$$

Пример Формула для площади $\qquad f_y = -1 \quad g_x = 1$

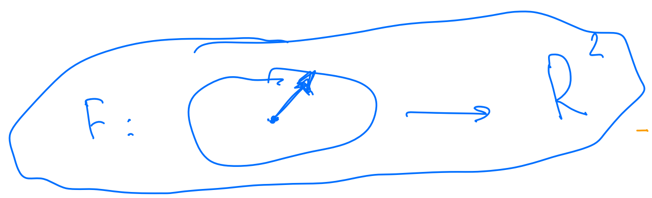


$$\text{Area}\,\Omega = \iint_{\Omega} dx\,dy.$$

$$\parallel \quad \frac{1}{2}\int_{\partial\Omega} (-y\,dx + x\,dy)$$

$F(x,y)$

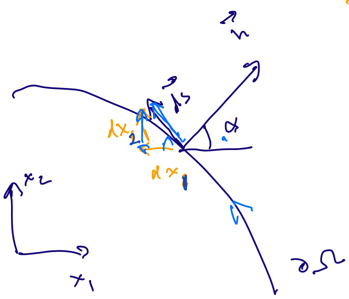
Векторная форма



1. **Векторное поле:** $\vec{x} = (x_1, x_2) \in \Omega, \ \vec{F}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} f_1(\vec{x}) \\ f_2(\vec{x}) \end{pmatrix}$

Пример: Поле скоростей.

$$\boxed{\int_{\partial\Omega} f_1\,dx_1 + f_2\,dx_2 = \iint_{\Omega} (f_{1_{x_1}} + f_{2_{x_2}})\,dx_1\,dx_2} \qquad (!)$$



$$dx_1 = -\sin\alpha\,ds$$

$$dx_2 = \cos\alpha\,ds$$

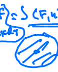
$$\vec{n} = (\cos\alpha, \sin\alpha)$$

$\sim$

$$-f_1\,dx_1 + f_2\,dx_2 = \left\langle \begin{pmatrix} +f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix} \right\rangle ds = \langle \vec{F}, \vec{n} \rangle\,ds$$

Левая часть (!) : $\displaystyle\int_{\partial\Omega} \langle \vec{F}, \vec{n} \rangle\,ds$

$F = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}$ $\quad \iint_{\Omega} \operatorname{div} \vec F = \int_{\partial\Omega} \langle F, n \rangle ds$.



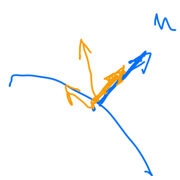
Определение: Дивергенция: $\operatorname{div} \vec F = \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2}$.

Формула Грина: $\iint_{\Omega} \operatorname{div} \vec F = \int_{\partial\Omega} \langle \vec F, \vec n \rangle ds$

$\operatorname{div} \vec F = 0$

$\int_{\partial\Omega} \langle \vec F, \vec n \rangle ds = 0$

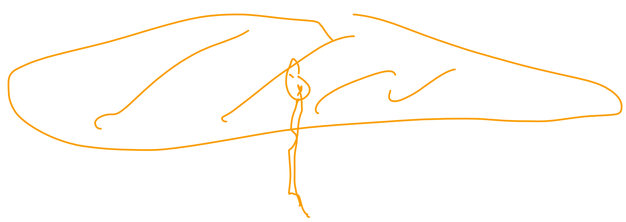
Гидродинамическая интерпретация:



$\langle \vec F, \vec n \rangle$

$\operatorname{div} F(x,y) = \left(\begin{array}{c} \text{объем жидкости} \\ \text{появляющейся} \\ \text{в } (x,y) \text{ за} \\ \text{единицу времени} \end{array} \right)$ на единицу площади

$\operatorname{div} \vec F \, dx\, dy$



Частный случай: Потенциальное поле скоростей:

$\Phi : \Omega \to R$, $\quad \vec F(x) = \operatorname{grad} \Phi = \begin{pmatrix} \Phi_{x_1} \\ \Phi_{x_2} \end{pmatrix}$

$\langle \vec F, \vec n \rangle = \langle \nabla \Phi, \vec n \rangle = \frac{\partial \Phi}{\partial \vec n}$

$\vec F = \operatorname{grad} \Phi$

$$\iint_{\Omega} \operatorname{div} \operatorname{grad} \Phi \, dx\, dy = \int_{\partial\Omega} \langle \vec F, \vec n \rangle ds = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial \Phi}{\partial n} ds$$

$$\nabla\Phi = \begin{pmatrix}\Phi_x \\ \Phi_y\end{pmatrix}; \quad \nabla\cdot\nabla\Phi = \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} = \underline{\Delta\Phi}$$

$$\boxed{\iint_\Omega \Delta\Phi \, dx\, dy = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial\Phi}{\partial n}\, ds.}$$

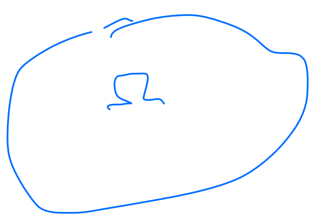
Ун

— Не будет спрашиваться на экзамене.

<u>Упражнение:</u> Выберите Φ так чтобы получить формулу Гаусса-Остроградского в электростатике.

$$\Delta\Phi \overset{?}{=} 0 \qquad \operatorname{div}\operatorname{grad}\Phi = 0.$$

Важная формула. (Грин).



$u(x,y)$, $v(x,y)$; $u, v : \Omega \to R$

$$\iint_\Omega (u\Delta v - v\Delta u)\, dx\, dy = \int_{\partial\Omega}\left(u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n}\right) ds.$$

Док-во: $\vec{F} = u \nabla v$ – для неё формула Гаусса

$$u(x,y)\begin{pmatrix} v_x(x,y) \\ v_y(x,y) \end{pmatrix}$$

$$\iint_{\Omega} \operatorname{div} \vec{F}\, \cancel{dx}dy = \int_{\partial\Omega} \langle \vec{F}, \vec{n} \rangle ds$$

Правая часть:

$$u\langle \nabla v, \vec{n} \rangle = u \frac{\partial v}{\partial n}$$

Левая часть:

$$\operatorname{div}(u \cdot \nabla v) = \frac{\partial}{\partial x}(u v_x) + \frac{\partial}{\partial y}(u v_y) =$$

$$= u_x v_x + \underline{u v_{xx}} + u_y v_y + \underline{u v_{yy}}$$

Формула Стокса:

$$\iint_{\Omega} \left[(u_x v_x + u_y v_y) + u \Delta v \right] dx\, dy = \int_{\partial\Omega} u \frac{\partial v}{\partial n} ds.$$

$v \nabla u$

$$\iint_{\Omega} \left[(u_x v_x + u_y v_y) + v \Delta u \right] dx\, dy = \int_{\partial\Omega} v \frac{\partial u}{\partial n} ds$$

$$\iint_{\Omega} (u\Delta v - v\Delta u)\,dx\,dy =$$

$$= \oint_{\partial\Omega}\left(u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n}\right) ds.$$

Ламб

Lamb Fluid dynamics.

Лаврентьев Шабат: ___, функции комплексного переменного

$u_x = v_y$ $\qquad u_{xx} = v_{yx} = -u_{yy}.$

$u_y = -v_x$ $\qquad u_{xx} + u_{yy} = 0$