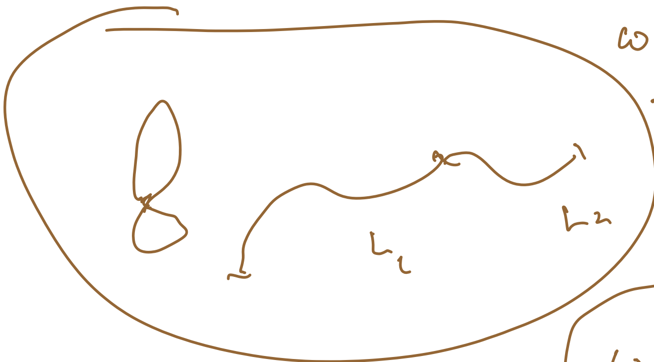
1. Сухой остаток.

Что такое форма?

$U \subset \mathbb{R}^2$. $\quad k=1$

$\omega = a(x,y)\,dx + b(x,y)\,dy$



$\int_L \omega = \int_L a\,dx + b\,dy.$

$\omega: L \to \Phi_\omega(L).$

Цель:

1) $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$

$k < n$ $\quad$ ω - форма - индекс k.

$\Gamma \to \int_\Gamma \omega.$

Формальности.

$U \subset \mathbb{R}^n \quad 0 \le k \le n$

$i = (i_1 \dots i_k)$, $i_j \in \{1, \dots, n\}$

$w_{i_1 \dots i_k}(x)$ $\qquad x \in U \subset \mathbb{R}^n$

Дифференциальная форма порядка k.

$$\omega = \sum_{i_1 \dots i_k} w_i(x)\, dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$$

$$\tilde{\omega} = \sum_{i_1 \dots i_k} \tilde{w}_i(x)\, dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$$

$$i_1, \dots, i_k \; \Big| \; \alpha : (1, 2, \dots, k) \to (\alpha(1), \alpha(2), \dots, \alpha(k))$$

$$dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} = (-1)^{\operatorname{sign} \alpha}\, dx_{i_{\alpha(1)}} \wedge \dots \wedge dx_{i_{\alpha(k)}}$$

Пример $k = 2$.

$$dx_1 \wedge dx_2 = -dx_2 \wedge dx_1$$

Канонический вид.

$$\omega = \sum_{i_1 < i_2 < \dots < i_k} w_{i_1 \dots i_k}\, dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$$

$\omega_{i_1 \dots i_k} : U \to \mathbb{R}$

$\Gamma \subset \mathbb{R}^n$, $\dim \Gamma = k \le n$.

$U \subset \mathbb{R}^k$ $\quad \varphi : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$

$\Gamma = \varphi(U)$.

$$\int_\Gamma \omega = ?$$

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & & \mathbb{R}^k \\ \ni & & \ni \\ x & = & \varphi(u) \end{array}$$

$\varphi_1(u_1, \dots, u_k) = x_1$

$\dots$

$\varphi_n(u_1, \dots, u_k) = x_n$

$$\begin{array}{cc} & k \\ \begin{array}{c} i_1 \\ \\ i_k \end{array} & \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial u_1} & \dots & \frac{\partial \varphi_1}{\partial u_k} \\ \dots & & \\ \frac{\partial \varphi_n}{\partial u_1} & & \frac{\partial \varphi_n}{\partial u_k} \end{pmatrix} \leftarrow n \end{array}$$

$i_1, \dots, i_k$

$$D_{i_1 \dots i_k} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi_{i_1}}{\partial u_1} & \dots & \frac{\partial \varphi_{i_1}}{\partial u_k} \\ \dots & & \\ \frac{\partial \varphi_{i_k}}{\partial u_1} & & \frac{\partial \varphi_{i_k}}{\partial u_k} \end{vmatrix}$$

$$\partial_j(\ ) = \frac{\partial}{\partial u_j}(\ )$$

$$\begin{pmatrix} \partial_1\varphi_1 & \cdots & \partial_k\varphi_1 \\ \vdots & & \\ \partial_1\varphi_n & & \partial_k\varphi_n \end{pmatrix}$$

Определение.

$$\int_\Gamma \omega = \sum_{i_1 \dots i_k} \int_V \omega_i(\varphi(u))\, D_i(u)\, du_1 \dots du_k$$

$$\omega = \sum_i \omega_i \, dx^i \qquad dx^i = dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$$

Нам нужно:

- Исследовать свойства форм.
- Проверить все аккуратно.
-  – это бублик.
- **Теорема Стокса:**

Γ – k-мерная поверхность

ω – форма порядка $k-1$

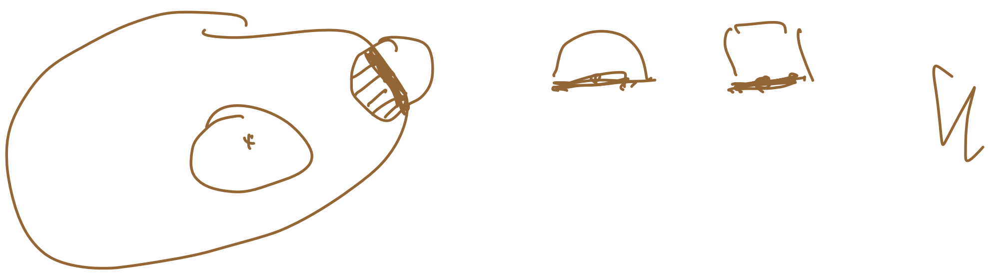
То:

$\partial\Gamma$ – $k-1$-мерная

Сейчас определим → $d\omega$ — форма порядка k.

$$\boxed{\int_{\partial\Gamma}\omega = \int_{\Gamma} d\omega.}$$

Что



Что можно делать с формами?

1. Складывать ω, $\tilde{\omega}$ — порядка k.

$\omega+\tilde{\omega}$ — " — " —

Обозначим $U \subset \mathbb{R}^n \,\big|\, \Omega^k(U)$ — формы порядка k.

2. $k=0$ Ω^0 : $\omega : U \to \mathbb{R}$

$k > n$ $\quad i_1, \dots, i_k$

$$dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} = 0$$

$$dx_1 \wedge dx_2 = -dx_2 \wedge dx_1$$

$$0 \quad \Omega^0 \quad \Omega^1 \quad \Omega^n \quad 0$$

$$w(x)\, dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$$

3. Внешнее умножение:

$\omega \in \Omega^k$ $\qquad \tilde{\omega} \in \Omega^l$

$$\omega = \sum_{I_k} w_i \, dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$$

$$\tilde{\omega} = \sum_j \tilde{w}_j \, dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_l}$$

$$\omega \wedge \tilde{\omega} = \partial_1 \tilde{w}\, dx_1 + \dots + \partial_n \tilde{w}\, dx_n$$

$$= \sum_{i,j} w_i \tilde{w}_j \, dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \dots \wedge dx_{i_k} \wedge dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_l}$$

$$\omega \wedge \tilde{\omega} \in \Omega^{k+l}$$

Базисные формы:

$i_1, \dots, i_k$ $\qquad \omega_{i_1 \dots i_k}(x)\, dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$

! 4. Дифференцирование:

$$f(x) \in \Omega^0 \qquad x \in \mathbb{R}^n$$

$$\Omega^1 \ni df = f_{x_1} dx_1 + f_{x_2} dx_2 + \dots + f_{x_n} dx_n \in$$

$$\omega \in \Omega^k. \qquad d\omega \in \Omega^{k+1}_{i_1 \dots i_k}(x)\, dx_{i_1} \wedge \dots \wedge d$$

$$\to \quad \omega = \sum_i \omega_i\, dx^i$$

$$d\omega = \sum_i d\omega_i \wedge dx^i$$

$$d\omega = \sum_i (\partial_1 \omega_i\, dx_1 + \dots + \partial_n \omega_i\, dx_n) \wedge$$

$$dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}.$$

$$0 \xrightarrow{d} \Omega^0 \xrightarrow{d} \Omega^1 \xrightarrow{d^2} \Omega^2 \dots \to \Omega^k \xrightarrow{d} 0$$

Свойства дифференциала.

1) $\omega \in \Omega^k, \quad \tilde{\omega} \in \Omega^l$

$$\boxed{d(\omega \wedge \tilde{\omega}) = d\omega \wedge \tilde{\omega} + (-1)^k \omega \wedge d\tilde{\omega}}$$

2) $$d\,d\omega = 0$$

$\omega \in \Omega^k \qquad \omega = \omega_i\, dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$

$$d\omega = \underbrace{(d\omega_i)}\wedge \underbrace{dx_{i_1} \dots dx_{i_k}}$$

$$d(d\omega) = (d\,d\omega_i) \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} -$$

$$- d\omega_i \wedge \underbrace{d(dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k})}_{\parallel \atop 0}.$$

т.е. $\quad d\,d\omega_i \overset{?}{=} 0$

—

$$d\omega_i = \sum_{j=1}^{n} \partial_j \omega_i \, dx_j$$

$$d\, d\omega_i = \sum_{j,l} \partial_l \partial_j \omega_i \, \underline{dx_l \wedge dx_j} \quad - \ ?$$

$j = l.$

$$\partial_l \partial_j \omega_i \, \underline{dx_l \wedge dx_j}$$

$$\partial_j \partial_l \omega_i \, \underline{dx_j \wedge dx_l}.$$

$$0 \xrightarrow{d} \Omega^0 \xrightarrow{d} \Omega^1 \xrightarrow{d} \Omega^2 \dots \to \Omega^k \xrightarrow{d} 0$$

$$\xrightarrow{d} \Omega^k \xrightarrow{d}$$

$$X^k = \mathrm{Im}\, d \subset \Omega^k.$$

$$Y^k = \mathrm{Ker}\, d \subset \Omega^k.$$

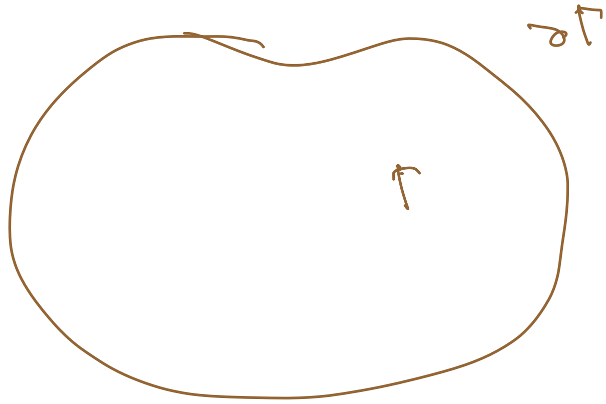
$$X^k \subset Y^k \qquad \mathcal{H}^k = Y^k / X^k$$

k- когомологий де Рама.

Напоминание:

$\Gamma \subset \mathbb{R}^n$

$k = n - 1$

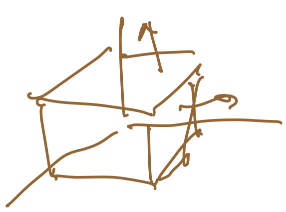


Мы доказали:

$$f : \Gamma \to \mathbb{R}.$$

$$\int_{\Gamma} \frac{\partial f}{\partial x_j} = \int_{\partial\Gamma} f \cdot \nu_j \, ds.$$

ν_j — компонента внешней нормали направленная вдоль x_j



Это ф-ла Стокса.

$n \qquad Q = [0,1]^n$

$$\boxed{\omega = \sum_{j=1} \omega_j \, dx_1 \wedge dx_2 \wedge \dots \wedge \cancel{dx_j} \wedge \dots \wedge dx_n}$$

$$d\omega = \sum_j (\partial_1 \omega_j \, dx_1 + \dots + \partial_n \omega_j \, dx_n) \wedge$$

$$dx_1 \wedge dx_2 \wedge \dots \wedge \cancel{dx_j} \wedge \dots \wedge dx_n =$$

$$= \sum_j (\partial_1 \omega_1 + \dots + \partial_n \omega_n)$$

$$\partial_j \omega_j \, dx_j \wedge dx_1 \wedge dx_2 \wedge \dots \wedge \cancel{dx_j} \wedge \dots \wedge dx_n$$

$$\boxed{d\omega = \sum_j \left[(-1)^{j-1} \partial_j \omega_j \right] dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n.}$$

$[0,1]^n$

z, y, x

$$\int_{\Omega} d\omega = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} \int_{\Omega} \partial_j \omega_j \, dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n.$$

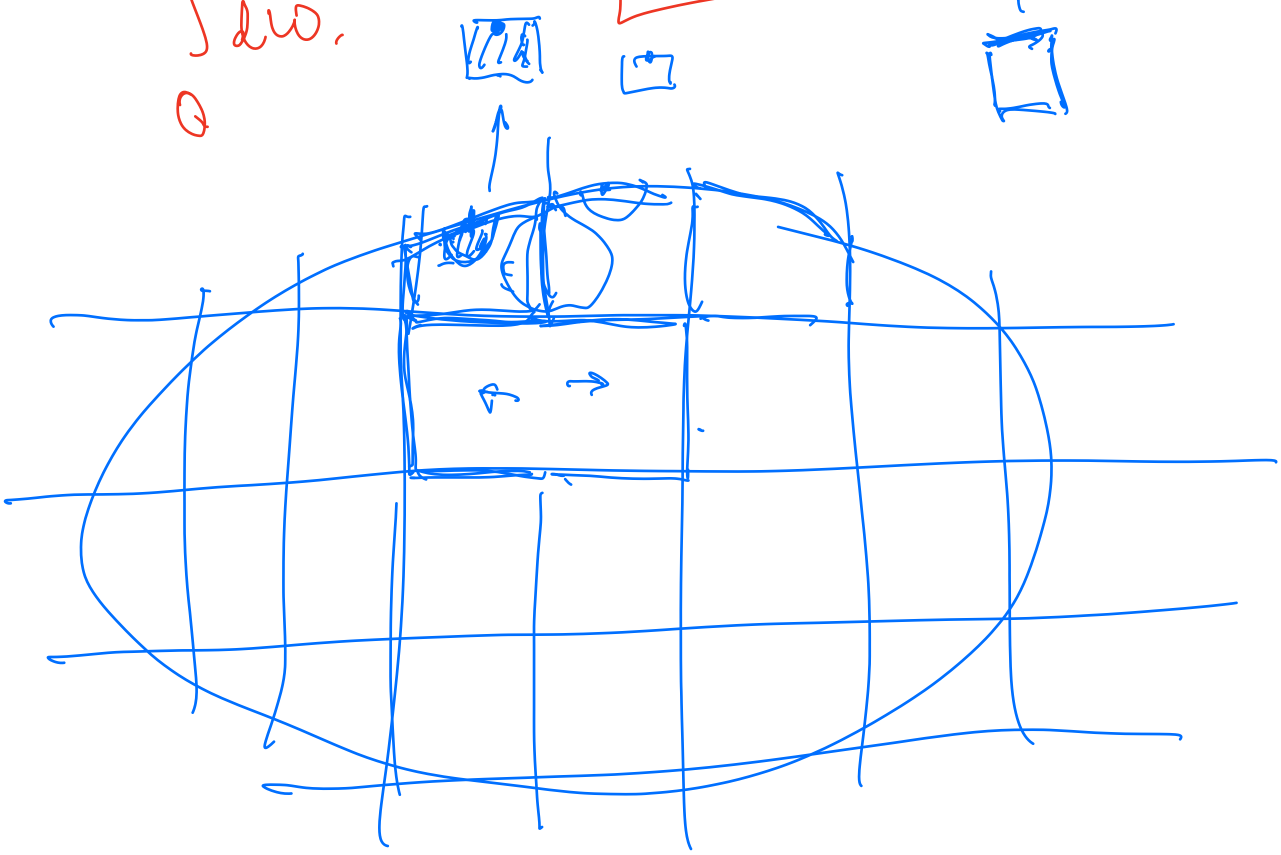
$$\int P \, dx \, dy + Q \, dz \, dx +$$

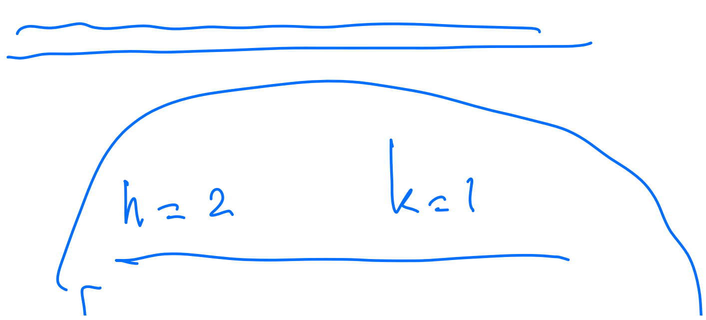
$+ R\, dy\, dz.$

$$\sum_{Q} \int \partial_j w_j \, dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n = \boxed{\sum \int_{x_j=0}^{x_j=1} w_j \, dx_1 \cdots \cancel{dx_j} \cdots dx_n}$$

n

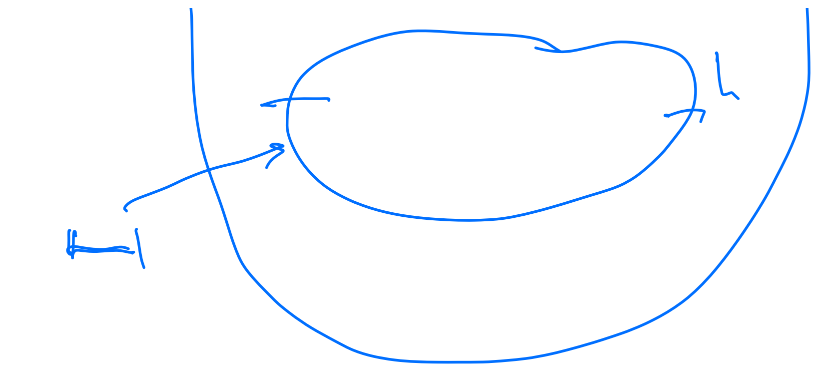
$$\int_Q d\omega,$$





$n = 2 \qquad k = 1$

ω



$a(x,y)\,dx + b(x,y)\,dy$

$\int_L \omega$

(Гладкое) Разбиение единицы.

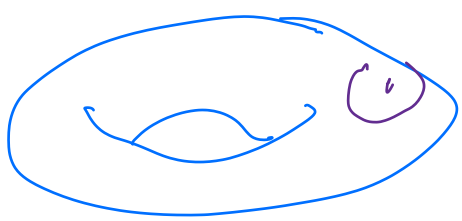
Γ – dim k $\quad \Gamma \subset \mathbb{R}^n$

1) Γ – гладкое, $\Gamma = \varphi(U)$, $U \subset \mathbb{R}^k$ – шар.

Простая $\quad \varphi \in C^1 \quad \operatorname{rank} \frac{D\varphi}{Du} = k$.

карта.

2)

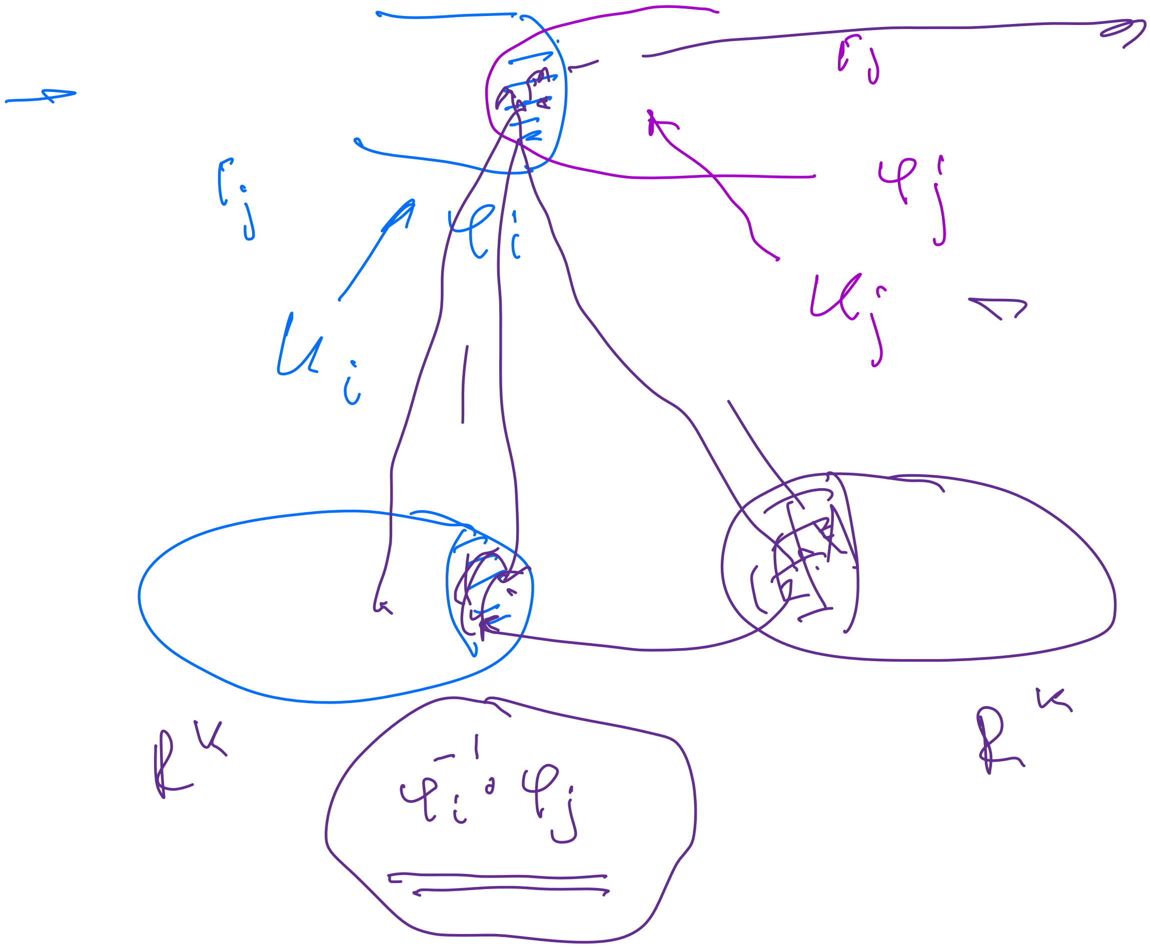


Γ

$\Gamma = \bigcup_{j=1}^{p} \Gamma_j \qquad \Gamma_j = \varphi_j(U_j)$

U_j – шар в $\mathbb{R}^k$.

$U_j \cap U_i \neq \varphi$



$f : \Gamma \to R.$

f — гладкая если

$f \circ \varphi_i$ — гладкая

Многообразие $\det J(\varphi_j^{-1} \varphi_i)$ -

Ориентируемы. — все одного знака.

Теорема Уитни:

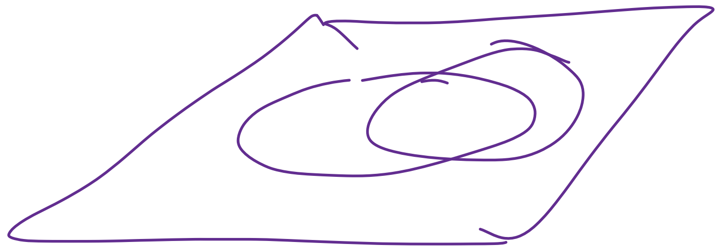
M — многообр. ориент. размерности n

$$M \subset R^{2n}.$$

неориент.

Могу! взять! $M \subset R^{2n+1}$.

$\Gamma = \bigcup_{j=1}^{n} \Gamma_j$ — Γ_j — открытые все Γ



$\exists\, \varphi_j : \Gamma \to R$. такие что:

1) $0 \leq \varphi_j \leq 1$.

2) $\sum \varphi_j = 1$ на Γ.

3) $\operatorname{supp} \varphi_j \Subset \Gamma_j$

$$f : \Gamma \to \mathbb{R}$$

$$f = f \cdot 1 = f \cdot \sum \varphi_j = \sum \underbrace{f \cdot \varphi_j}$$

$\omega \in \Omega^k(\Gamma)$ $\qquad \Gamma = \bigcup \Gamma_j$

$\{\varphi_j\}$

$$\omega = \sum \underbrace{\varphi_j \omega}$$

$$\int_{\Gamma} \omega = \sum \int_{\Gamma_j} \varphi_j \omega$$