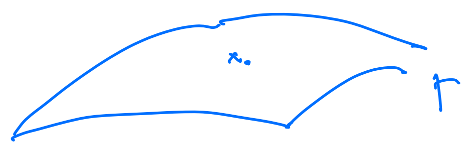
Дифференциальные формы

Постановка задачи

- $\mathbb{R}^n$ $\quad k \le n$

$\cup$

- U

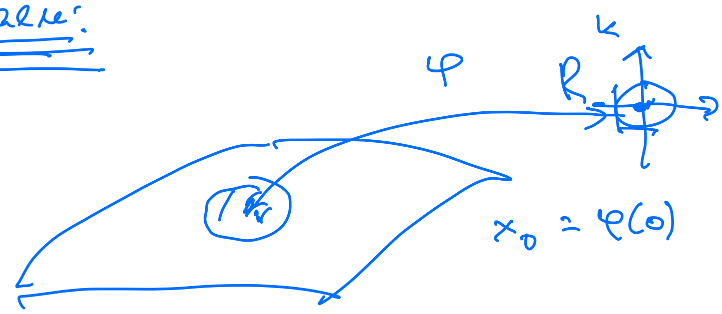


$\subset U$

$\dim \Gamma = k.$

Поверхность с краем:

$x_0 \in \mathrm{Int}\,\Gamma$



$x_0 = \varphi(0)$

$Q^k = (-1, 1)^k$

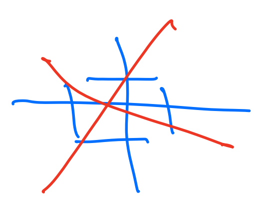
$$\varphi = \begin{pmatrix} \varphi_1(u_1, \dots, u_k) \\ \dots \\ \varphi_n(u_1, \dots, u_k) \end{pmatrix}$$

$\exists\, V_{x_0}$ - окр. x_0 и

$\varphi : Q^k \to V_{x_0}$ - биекция.

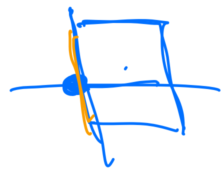
$\varphi(0) = x_0.$

$x_0 \in \partial\Gamma$



$k-1$

$\Delta := [0,1]\times Q$



$\varphi: \Delta \to \Gamma$

$\varphi(0,0,\dots,0) \to x_0$ биекция, гладкость и т.д.

---

k-формы.

$x \in U$, $U \subset \mathbb{R}^n$

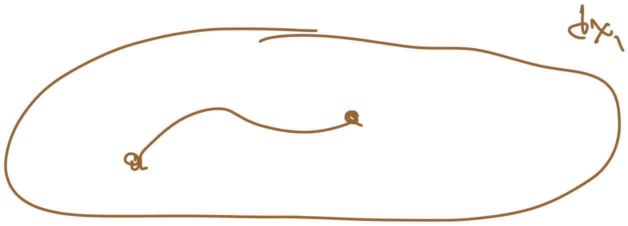
$$\omega(x) = \sum_{i_1,\dots,i_k} \omega_{i_1 \dots i_k}(x)\, dx_{i_1}\wedge\dots\wedge dx_{i_k}$$

$i=(i_1,\dots,i_k)$ — мультииндекс.

$\omega_i(x)$

Модель: $U\subset\mathbb{R}^2$, $n=2$, $k=1$

$$\omega = a(x,y)\,\underset{dx_1}{dx} + b(x,y)\,\underset{dx_2}{dy}$$



ω, $\langle\omega\rangle$

Наша цель: **Дано:** ....

Что такое $\int_\Gamma \omega$ — ?

Шаг 1 Простая поверхность

$\exists \underline{V} \subset \mathbb{R}^k \quad \varphi : V \longrightarrow \underset{\substack{\cap \\ x = \varphi(u)}}{\Gamma} \subset \mathbb{R}^n \quad u \in V$

- φ – биекция
- $\varphi \in C^1$

$$\begin{pmatrix} \varphi_1(u_1, \dots, u_k) \\ \varphi_2(u_1, \dots, u_k) \\ \dots \\ \varphi_n(u_1, \dots, u_k) \end{pmatrix}^n = \varphi(u).$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} \varphi_1(u_1, \dots, u_k) \\ \varphi_2(u_1, \dots, u_k) \\ \dots \\ \varphi_n(u_1, \dots, u_k) \end{pmatrix} \begin{array}{l} k \\ - i_1 \\ - i_2 \\ \dots i_k. \end{array}$$

$i = (i_1, \dots, i_k)$

$$D_i^{\varphi}(u) =_{\det} \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_{i_1}}{\partial u_1} & \dots & \frac{\partial \varphi_{i_1}}{\partial u_k} \\ \dots & & \dots \\ \frac{\partial \varphi_{i_k}}{\partial u_1} & \dots & \frac{\partial \varphi_{i_k}}{\partial u_k} \end{pmatrix}$$

$$\omega(x) = \sum \varpi_i(x)\, dx^i$$

$$dx^i = dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}.$$

(φ)

$$\boxed{\int_\Gamma \omega = \sum_i \int_V \omega(\varphi(u))\, D_i(u)\, du_1\ldots du_k}$$

<u>Наши задачи:</u>

• Проверить корректность

$W \quad \psi : W \to \Gamma \qquad \omega \to\ )$

$W \subset \mathbb{R}^k$

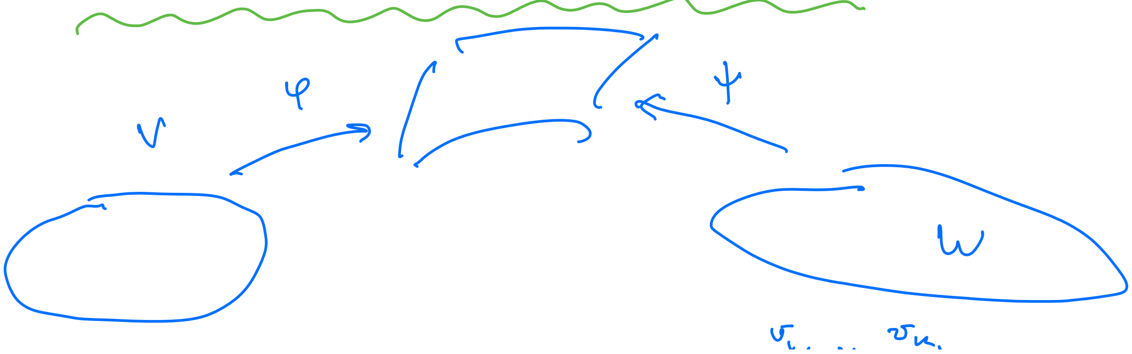
$$\int_\Gamma \omega = \sum_i \omega_i(\psi(v))\, D_i^{(\psi)}(v)\, dv_1\ldots dv_k$$

<u>Д-во:</u>

смотри!

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial\psi_{i_1}}{\partial v_1} & \ldots & \frac{\partial\psi_{i_1}}{\partial v_k} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial\psi_{i_k}}{\partial v_1} & \ldots & \frac{\partial\psi_{i_k}}{\partial v_k} \end{pmatrix}$$

$D_i^{\varphi}\, du_1\ldots du_k \qquad\qquad D_i^{\psi}\, dv_1\ldots dv_k.$



$u_1 \dots u_k$

$u = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_k \end{pmatrix}$ $\qquad\qquad$ $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_k \end{pmatrix}$

$$u = \varphi_i^{-1}(\psi_i(v))$$

$$du_1 \dots du_k = \underbrace{J(\varphi_i^{-1})\, J(\psi_i)}_{}\, dv_1 \dots dv_k.$$

с Якобиан.

$i_1, \dots, i_k.$

$$V \longrightarrow \begin{pmatrix} \varphi_{i_1} \\ \vdots \\ \varphi_{i_k} \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} \psi_{i_1} \\ \vdots \\ \psi_{i_k} \end{pmatrix} \longleftarrow W$$

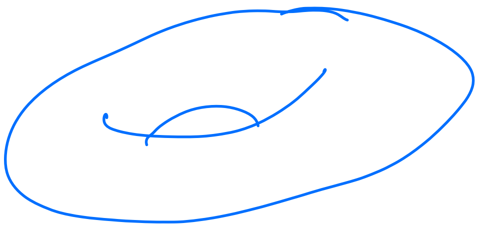
$u \qquad\qquad\qquad\qquad v$

$$x = \varphi(u) = \psi(v).$$

- Напоминание:

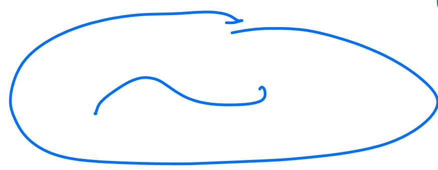
  - Внешнее произведение
  - дифференциал.

$$0 \to \Omega^0 \to \Omega^1 \to \dots \to \Omega^n \to 0.$$



Разбиение единицы:

Лемма:

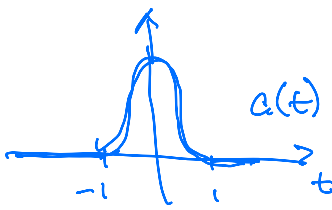


$U \subset \mathbb{R}^n$

$K \subset U$.

$\Rightarrow \exists \varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\varphi|_K = 1$

$\varphi|_{\mathbb{R}^n \setminus U} = 0$



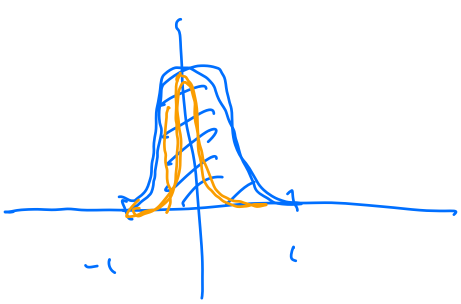
$a(t) = e^{-\frac{1}{1-t^2}}$

$0 \le a \le 1$ $\quad |t| > 1 \Rightarrow a = 0$

$a(|x|)$: $\quad a(0) = 1$.

$$\int_{\mathbb{R}^n} a(x)\,dx = 1$$

$$\frac{1}{\varepsilon^n} a\left(\frac{|x|}{\varepsilon}\right) = \alpha_\varepsilon(x)$$



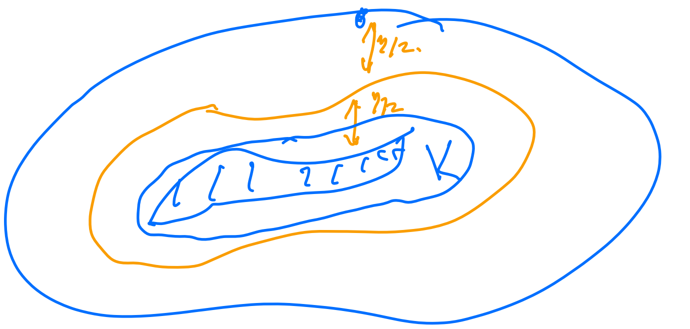
$$\int_{\mathbb{R}^n} a(x)\,dx = 1$$

$x = x_1, .., x_n =$

$= \left(\frac{y_1}{\varepsilon}, \frac{y_2}{\varepsilon}, \ldots \frac{y_n}{\varepsilon}\right)$

$$\frac{1}{\varepsilon^n}\int_{\mathbb{R}^n} a\left(\frac{y_1}{\varepsilon}, \frac{y_2}{\varepsilon}, \dots, \frac{y_n}{\varepsilon}\right) dy =$$

$$= \frac{1}{\varepsilon^n}\int_{\mathbb{R}^n} a\left(\frac{y}{\varepsilon}\right) dy.$$



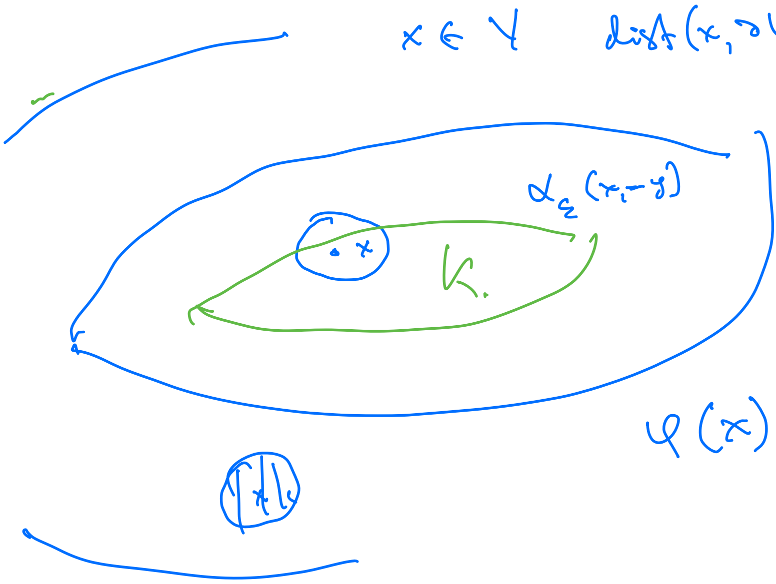
$\operatorname{dist}(K, \partial U) = \eta > 0.$

$V = \{x : \operatorname{dist}(x, K) \le \eta/2\}.$

$$\chi_V(x) = \begin{cases} 1 & x \in V \\ 0 & x \notin V \end{cases}$$

$\varepsilon = \frac{\eta}{10}$ $\quad \varphi(x) = \int \alpha_\varepsilon(x-y)\,\chi_V(y)\,dy.$

$x \in K$ $\quad \operatorname{dist}(x, \partial V) \geq \varepsilon.$ $\quad \varphi(x) = 1$



$\varphi(x) = \int \alpha_\varepsilon(x-y)\,dy = 1$

u

$$\varphi(x) = \int \alpha_\varepsilon(x-y) f_\nu(y)\,dy.$$

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\varphi(x) = \int \frac{\partial}{\partial x_1}\alpha_\varepsilon(x-y) f_\nu(y)\,dy.$$

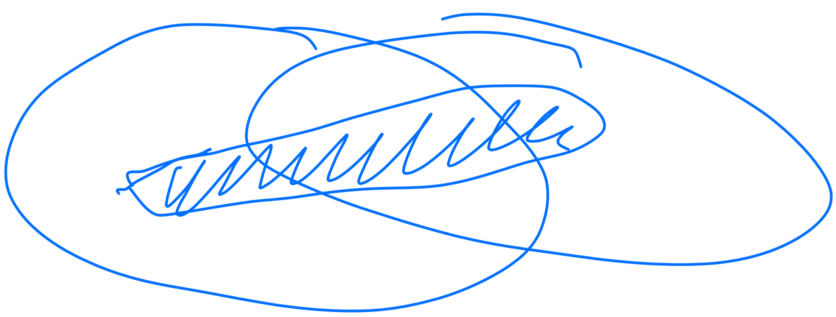
Разбиение 1

$$K \subset U_1 \cup U_2.$$

Утв: $\exists\ \varphi_1(x), \varphi_2(x) \in C^\infty$

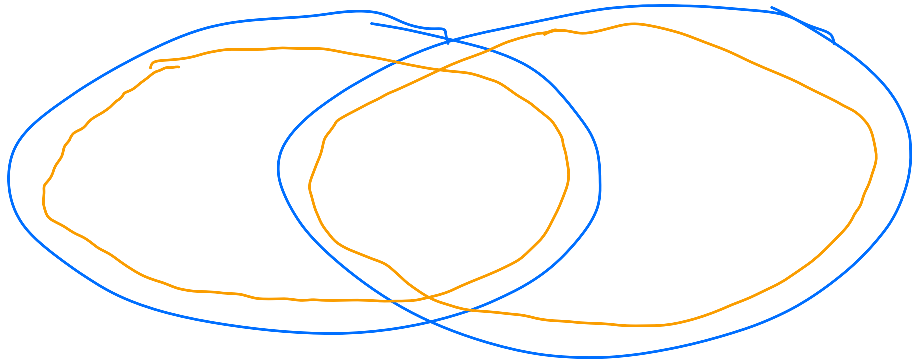
$\operatorname{supp}\varphi_1 \subset U_1, \quad \operatorname{supp}\varphi_2 \subset U_2$

$\varphi_1(x) + \varphi_2(x) = 1, \quad x \in V_K.$



$$U = U_1 \cup U_2$$

$$\varepsilon = \operatorname{dist}(K, \partial U).$$

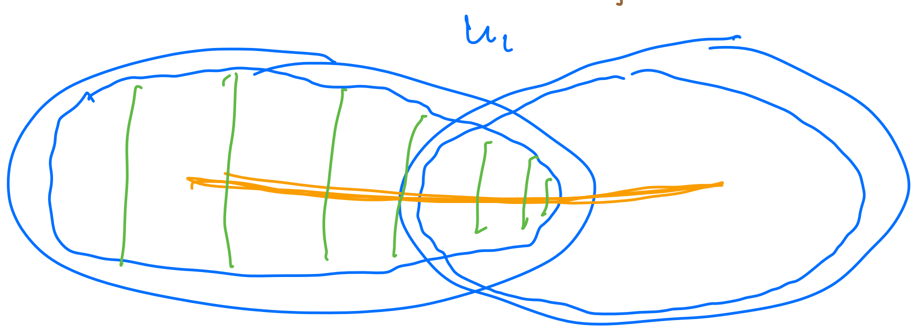


$$U_1^\varepsilon = \{x \in U_1,\ \mathrm{dist}(x, \partial U_1) > \varepsilon/2\}$$

$$U_2^\varepsilon = \{x \in U_2 : \mathrm{dist}(x, \partial U_2) > \varepsilon/2\}.$$

$$K \subset U_1^\varepsilon \cup U_2^\varepsilon.$$

$f(x)$ $x \in K$.



$$x \notin U_1^\varepsilon \cup U_2^\varepsilon.$$

$\psi_1\big|_{U_1^\varepsilon} = 1$ $\psi_1 = 0$ $x \notin U_1$

$\psi_1 \in C^\infty$.

$\psi_2\big|_{U_2^\varepsilon} = 1$ $\psi_2 = 0$ $x \in U_2$

$\psi_2 \in C^\infty$.

$$\varphi_1 = \frac{\psi_1}{\psi_1 + \psi_2}$$ где знаменатель $\neq 0$.

$$\varphi_2 = \frac{\psi_2}{\psi_1 + \psi_2}$$

$$f(x) = \underbrace{\varphi_1(x) f(x)} + \underbrace{\varphi_2(x) f(x)}$$

<u>Упражнение:</u>

~~Разбиение~~

$K \subset \mathbb{R}^n \quad \{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ — открытые.

$$\bigcup U_\alpha \supset K.$$

$\exists \{\varphi_\alpha\}_{\alpha \in A}$;

1) $\varphi_\alpha \in C^\infty(\mathbb{R})$.

2). $0 \le \varphi_\alpha \le 1$.

3) $\forall x \in K \quad \exists V_x$ — окрестность

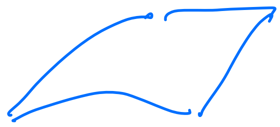
$$\# \{\alpha : \varphi_\alpha|_{V_x} \ne 0\} < \infty.$$

4) $\forall x \in K \quad \sum \varphi_\alpha(x) = 1$.

Разбиение единицы подчиненное покрытию $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$.

Назад к поверхностям.

$\mathbb{R}^n \supset \mathcal{U}$



$\Gamma \subset \mathcal{U}$

$\dim \Gamma = k.$

ω – порядка k.

$$\int_\Gamma \omega$$

$$\Gamma = \bigcup_j \Gamma_j$$

$\mathcal{U} = \bigcup_j \mathcal{U}_j$. $\{\varphi_j\}$ – разбиение единицы

$\Gamma \subset \mathcal{U}$ подчиненное $\mathcal{U}_j$

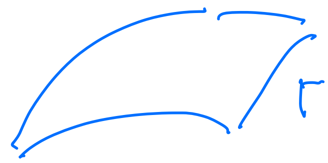
Достаточно определить на базисных формах

$$\omega = \varpi(x)\, dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k}$$

$$\omega = \sum_j \varphi_j(x)\, \varpi(x)\, dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k}$$

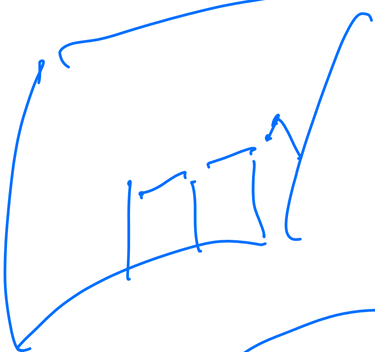
$$\int_\Gamma \omega = \sum_j \int_{\Gamma_j} \varphi_j(x)\, \varpi(x)\, dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k}$$

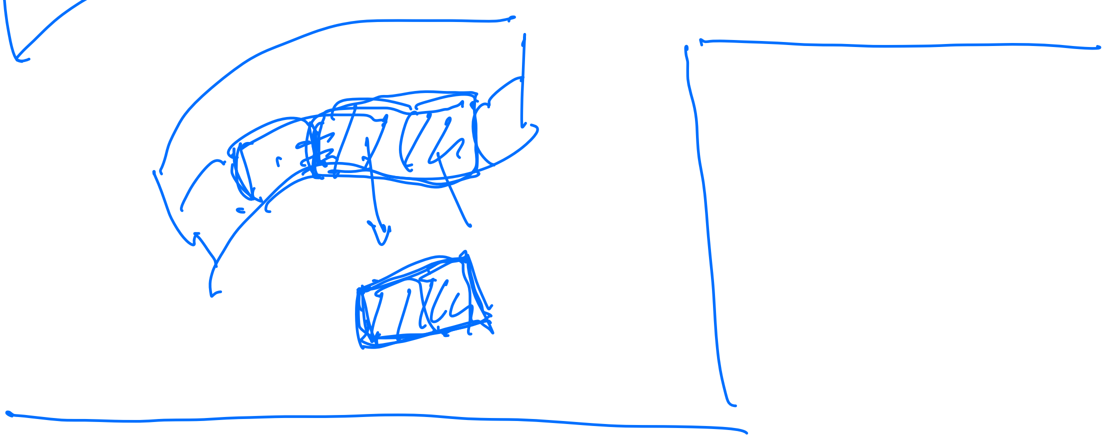
Теорема Стокса:

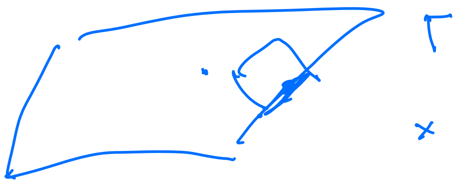
$k \le n$  $\dim \Gamma = k$

ω – порядка $k-1$

$$\boxed{\int\limits_{\partial\Gamma} \omega = \int\limits_{\Gamma} d\omega}$$

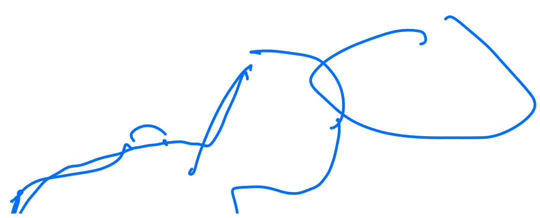




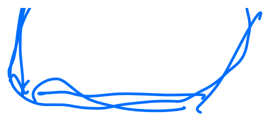


$x \to V_x \to \square\ Q_x$

$\{V_{x_j}\}$.



γ_{x_1}



$\varphi_1(u), \varphi_2(u) \ldots \varphi_k(u).$

$\frac{D(\varphi)}{D(u)}\, du_1 \ldots du_k.$

$d\varphi_1\, d\varphi_2 \ldots d\varphi_k.$

$B : \Gamma \longrightarrow \tilde{\Gamma}$ $\quad x_i = b_i(u).$

$dx_i \Rightarrow d\,b_i(u)$

$a\,dx + b\,dy. \qquad (x, y) \longrightarrow (X, Y)$

$\int_L A\,dX + B\,dY =$

$$= \int_{e} \Big[A \left(X'_x\,dx + X'_y\,dy \right) +$$

$$+ B \left(Y'_x\,dx + Y'_y\,dy \right) \Big].$$

Тонелли. Фубини

$(\mathfrak{X}, \mathfrak{A}, \mu)$, $(\mathcal{Y}, \mathcal{B}, \nu)$.

$\mathfrak{X} \times \mathcal{Y}$. $\quad R = \{ A \times B,\ A \in \mathfrak{A},\ B \in \mathcal{B} \}$

$$\lambda(A \times B) = \mu(A) \cdot \nu(B).$$

$$\lambda = \mu \otimes \nu.$$

Тонелли: $\Phi(x, y)$ – измеримая по λ

$\Phi(x, y) \geq 0$

1. ~~п.в.~~ μ-п.в. x $\quad \Phi(x, \cdot)$ – измерима по ν
2. $f(x) = \int \Phi(x, y)\, d\nu(y)$ – измерима по μ.
3. $\iint \Phi(x, y)\, d\lambda = \int d\mu \int \Phi(x, y)\, d\nu$

Фубини: $\int |\Phi(x,y)|\, d\lambda < \infty$

$\Longrightarrow$ те же выводы.

Фубини $\Longleftarrow$ Тонелли:

$\Phi = \Phi^+ - \Phi^-$

$$\Phi^+(x,y) = \begin{cases} \Phi(x,y) & \text{если } \geq 0 \\ 0 & < 0 \end{cases}$$

к каждой из них Тонелли.

Теорема Тонелли:

Схема док-ва:

Def: $\Phi(x,y) \geq 0$ красивая если она обладает 1), 2), 3).

Идея: Расширять класс красивых ф-ций.

- $f(x,y) = \chi_{\Delta \times B}(x,y)$.

- f, g - красивые, $\alpha, \beta \geq 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow \alpha f + \beta g$ - красивая.

- f, g - красивые и $f \leq g \Rightarrow f - g$ - красивая.

- $\{f_j\}$ - красивые, $f_j \uparrow f$
$\Rightarrow f$ - красивая

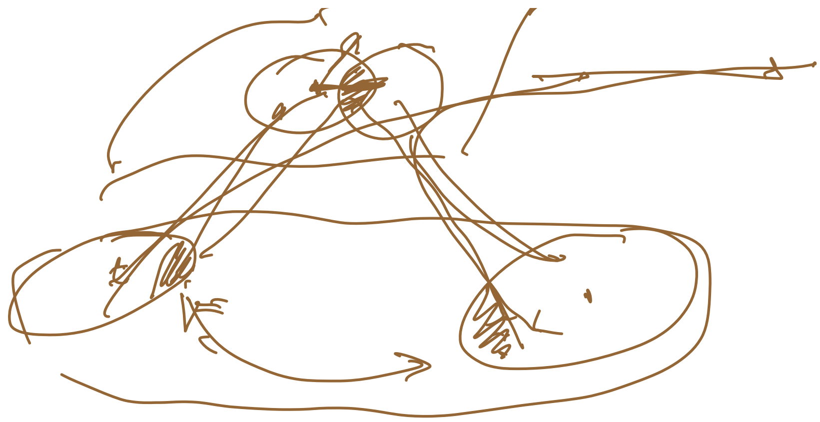
- f_1 - суммируема.

$f_j \geq f_{j+1}$ $\quad f_j \to f$

$\{f_j\}$ - красивые $\Rightarrow f$ - красивая.

$\cancel{f_j - f_1}$ $\quad f_1 - f_j$

$A \subset \mathcal{X} \times \mathcal{Y}$. $\quad \lambda(A) = 0$.

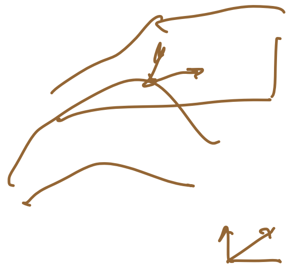


R

n

2n.

n R



T_x

k.

Спивак

Анализ на многообразиях.