$(\mathfrak{X}, \Sigma, \mu)$ $\qquad f_n, f$ – простые ф-ии:

Дано: $\quad f_n, f \geq 0, \quad f_n(x) \uparrow f(x) \quad \forall x \in \mathfrak{X}$

Утв. $\quad I(f_n) \nearrow I(f)$.

Напоминание:

f – простая

$$f(x) = \sum_{k=1}^{N} a_k \chi_{E_k}(x)$$

$$I(f) = \sum_{1}^{n} a_k \mu(E)$$

Док-во:

$$f(x) = \sum_{1}^{N} a_k \chi_{E_k}(x)$$

$$I(f_n) \uparrow I(f) \Leftarrow I(\chi_{E_k} f_n) \nearrow I(\underbrace{\chi_{E_k} \cdot f}_{a_k \chi_{E_k}})$$

Шаг 1: $\quad f = a \cdot \chi_E$

Шаг 2 $\quad f_n(x) \uparrow a \chi_E(x)$

$$I(f_n) \leq I(a \chi_E) = a \mu(E)$$

$$\lim_{n\to\infty} I(f_n) \le a\,\mu(E)$$

Надо $\ge$

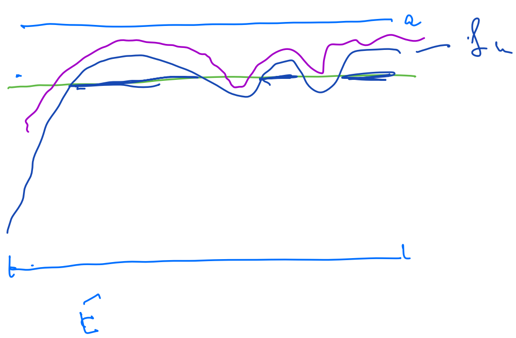
Будем доказывать: $\forall \varepsilon$

$$\lim_{n\to\infty} I(f_n) \ge a\,\mu(E) - \varepsilon$$

$\delta > 0$ $\qquad \{x : f_n(x) > a-\delta\}$

$$I(f_n) \ge (a-\delta)\,\mu(\underbrace{\{x : f_n(x) > a-\delta\}}_{\text{?}\ \to\ \mu(E) \text{ при } n\to\infty}) \quad (!)$$

Докажем $\to$?



$\{x : f_n(x) > a-\delta\}$

$\cap$

$\{x : f_{n+1}(x) > a-\delta\}$

$$E_n = \{x : f_n(x) > a-\delta\}$$

$f_n \uparrow \qquad E_{n+1} \supset E_n$

$$\bigcup_n E_n = E \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \mu(E_n) = \mu(E)$$

$$(!) \Rightarrow I(f_n) \geq (a-\delta)\mu(E_n)$$

$$\Downarrow$$

$$\lim_{n\to\infty} I(f_n) \geq (a-\delta)\mu(E) =$$

$$= a\mu(E) - \delta\mu(E).$$

<u>Напоминание:</u>

$E \quad \mu(E) < \infty.$

$\ldots \subset E_n \subset E_{n+1} \subset \ldots$

$\bigcup E_n = E$

$\Rightarrow \mu(E_n) \to \mu(E).$

$A_1 = E_1, \quad A_2 = E_2 \setminus E_1, \ldots \quad A_k = E_k \setminus E_{k-1}$

$\Rightarrow A_i \cap A_j = \emptyset \quad i \neq j.$

$E = \bigcup_1^\infty A_j \quad \Rightarrow$

$\mu(E) = \sum_1^\infty \mu(A_j)$

$\sum_1^n \mu(A_j) \nearrow \mu(E).$

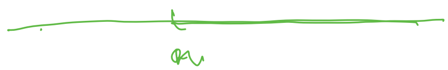
$\mu\left(\bigcup_1^n A_j\right) = \mu(E_n).$

Упр. $E_n \supset E_{n+1} \supset \dots$

$$\bigcap E_n = E$$

$$\mu(E_n) \searrow \mu(E)$$

! Все меры конечны !



Замечание: Дост. требовать

$f_n(x) \uparrow f(x)$ п.в. почти всюду

т.е. $\exists E_0 \subset E$; $\mu(E_0) = 0$ и

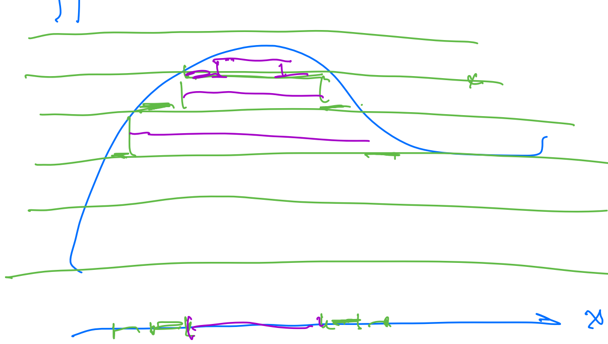
$f_n(x) \uparrow f(x)$, $x \notin E_0$.

Измеримые ф-ии.

Дано $f \geq 0$, f - измерима.

УП: $\exists \{f_n\}$, $f_n \geq 0$, простые и

$f_n(x) \uparrow f(x)$, $x \in E$.

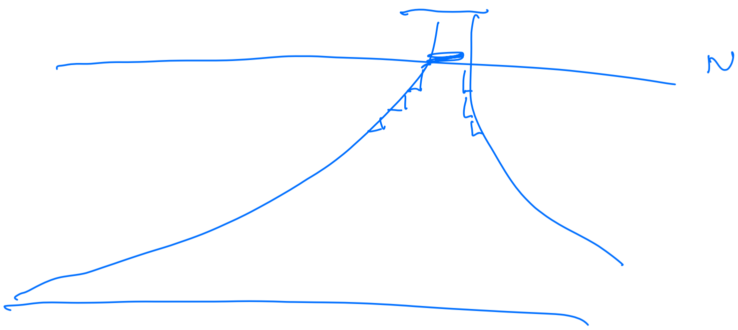


Д-во: 1) $0 < f(x) < c$.

$$[0, c] = \bigcup \left[\frac{i}{2^n}, \frac{i+1}{2^n}\right] =: I_n^i$$

$$E_i^{(n)} := \{x : f(x) \in I_n^i\}.$$

$$f_n(x) = \sum_{i=1}^{c \cdot 2^n} \frac{i}{2^n} \chi_{E_i^{(n)}}(x) \nearrow f$$



$$E = \{x : f \geq N\}. \qquad N \chi_E$$

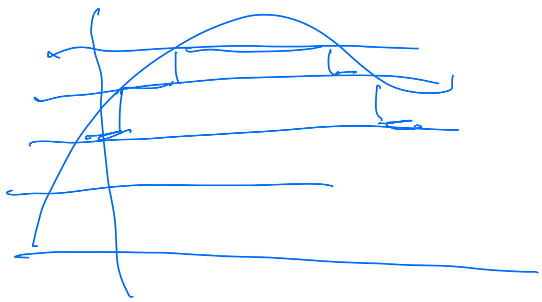
Запишите соотв. формулы.

$$(\mathfrak{X}, \Sigma, \mu)$$

! $f \geq 0$, f - измерима.

Def:

$$J(f) = \sup\{I(h),\ h \text{ - простая ф-ия},\ 0 \leq h \leq f\}.$$



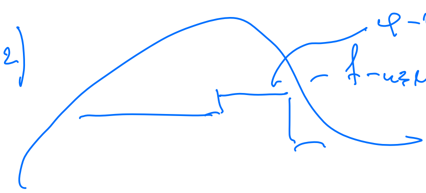
Св-ва интеграла Лебега:

1) Монотонность: $0 \le f_1 \le f_2$ – безмерим.

$\Rightarrow \mathcal{J}(f_1) \le \mathcal{J}(f_2)$

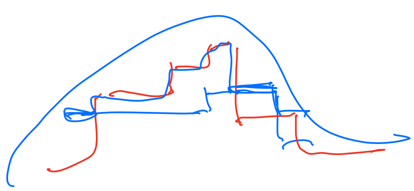
2) φ – простая $\quad 0 \le \varphi \le f$.

f – измеримая.



$$\Rightarrow \mathcal{J}(f) = \mathcal{J}(f-\varphi) + I(\varphi),$$

$\ge$



$$\mathcal{J}(f) = \sup\{ I(h),\ 0 < h < f,\ h \ge \varphi \}$$

h – простая.

$$\mathcal{J}(f) = \sup\{ I(\varphi + (h-\varphi)),\ 0 \le h < f,\ h \ge \varphi \}$$

$$I(\varphi) + \mathcal{J}(f-\varphi)$$

$h-\varphi$ – пробегает все простые ф-ции $\le f-\varphi$

неотриц.

Нер-во Чебышева.

$f \geq 0$, a; $E_a = \{x : f(x) \geq a\}$.

$a\chi_{E_a}(x) \leq f(x)$

$$\underline{J(f)} = \underbrace{J(f - a\chi_{E_a})}_{\geq 0} + \underbrace{I(a\chi_{E_a})}_{= a\mu(E_a)}.$$

$$\boxed{\mu(\{x : f(x) \geq a\}) \leq \frac{1}{a} J(f)}$$

Следующий вариант о монотонной сход.

Дано: f, f_n – измеримы, $f, f_n \geq 0$

$f_n \nearrow f$

Тл.: $J(f_n) \nearrow J(f)$.

Доказ.: $\lim\limits_{n\to\infty} J(f_n) \leq J(f)$

$\geq$ – ? Будем док.

$\lim\limits_{n} J(f_n) \geq J(f) - \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0.$

Можем выбрать простую h такую что

$$J(f) - \varepsilon < I(h)$$

Надо доказать:

$$\lim_n J(f_n) \geq I(h)$$

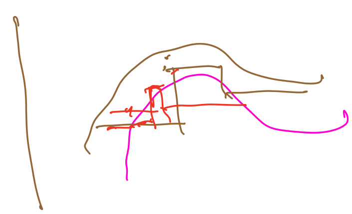
h_n — простая, $h_n \leq f_n$,

$$J(f_n) - \frac{1}{2^n} \leq I(h_n)$$

$$\tilde{h}_n = \max_{i \leq n}\{h_i\} \leq f_n$$

$$\underset{i \leq n}{h_i \leq f_i} \leq f_n$$

$$J(f_n) - \frac{1}{2^n} \leq I(\tilde{h}_n) \leq J(f)$$



Ут.: $\tilde{h}_n(x) \nearrow f(x)$ п.в.

$$\{x : \tilde{h}_n(x) \not\to f(x)\} =$$

$$= \bigcup_{\varepsilon} \{x : \lim h_n(x) < f(x) - \varepsilon\}$$

$$f(x) - \tilde{h}_n(x) =$$

$$= \underbrace{f(x) - f_n(x)} + \underbrace{f_n(x) - \tilde{h}_n(x)}$$

$$\{x : f(x) - \tilde{h}_n(x) > \varepsilon\} \Rightarrow$$

$$|f(x) - f_n(x)| > \frac{\varepsilon}{2}$$ или

$$|f_n(x) - \tilde{h}_n(x)| > \varepsilon/2$$

$\{x : |f(x) - f_n(x)| > \frac{\varepsilon}{2}\}$ — мера

и

$\underline{\{x : f_n(x) - \tilde{h}_n(x) > \varepsilon/2\}}$ — мера.

$$\mu(\{x : |f(x) - f_n(x)| > \frac{\varepsilon}{2}\}) \underset{n\to\infty}{\to} 0$$

↑ доказано.

$$\mu\{x : f_n(x) - \tilde{h}_n(x) > \frac{\varepsilon}{2}\} \le$$

$$\le \frac{2}{\varepsilon} \int [f_n(x) - \tilde{h}_n(x)] \le \frac{2}{\varepsilon} \frac{1}{2^n}.$$

$\tilde{h}_n(x) \not\to f(x)$

$\Rightarrow \exists$ n: сколь угодно большое, $\varepsilon > 0$.

$$\underline{\underline{\tilde{h}_n(x) < f(x) - \varepsilon.}}$$

$$\underline{\underline{\tilde{h}_n(x) \nearrow f(x)}}$$

$f_n(x) \nearrow f(x)$ $\quad h(x) \le f(x)$

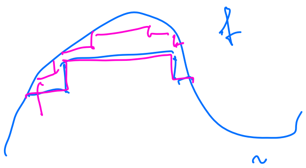
$$J(f) - \delta \le J(h).$$

$\lim J(f_n) \ge I(h)$.

$\tilde h_n \to g_n = \min\{\tilde h_n, h\}$ — простые.

$g_n \uparrow h$ всюду.

$I(g_n) \uparrow I(h)$.



$J(f_n) \ge J(\tilde h_n) - \frac{1}{2^n} \ge$

$\ge I(g_n) - \frac{1}{2^n}$

$\lim J(f_n) \ge \lim\limits_n I(g_n) = I(h) \ge$

$\ge J(f) - \delta$.

Что в итоге (схема, док-ва).

1. В тривиальную сторону.

В. другую сторону:

- Ослабить и заменить на простую ф-ию
- f_n — простые h_n т. что $J(f_n) \le I(h_n) + \frac{1}{2^n}$
- Организовали монотонную посл.

  $\tilde h_n = \max\limits_{i \le n} h_i$
- $\tilde h_n \uparrow f$.
- $\min(\tilde h_n, h) \uparrow h$.
- Предельный переход по простым функциям

Свойства: 1) $J(f)$ — можно определить по монотонной послед.

2) Линейность: f_1, f_2 — измеримы, $f_1, f_2 \geq 0$

$$\Rightarrow J(f_1+f_2) = J(f_1) + J(f_2)$$

$\varphi_n^1 \uparrow f_1$, $\varphi_n^2 \uparrow f_2$ $\quad \varphi_n^1 + \varphi_n^2 \uparrow f_1 + f_2$

3) $f \geq 0$, $J(f) = 0 \Rightarrow f = 0$ п.в.

$$\{x : f > 0\} = \bigcup_{\varepsilon} \underbrace{\{x : f(x) > \varepsilon\}}_{\text{— мера } = 0 \text{ по Чебышеву}}$$

Df: E — σ-конечно если

$$E = \bigcup E_n, \quad \mu(E_n) < \infty.$$

Ут: $f \geq 0$; $J(f) < \infty$;

$E := \{x : f(x) \neq 0\}$

Тогда E — σ-конечное мн-во

Упр. (Чебышев)

Интеграл над ф-ей множестве: $\quad \int_E f \, d\mu$

$f \geq 0$, задана, $\quad E \in \Sigma$.

$$J(f, E) = J(f \cdot \chi_E)$$

Ут: $E_i \supset E_{i+1}$, $\quad E = \bigcap E_i$

$$\Rightarrow J(f, E) = \lim_{i\to\infty} J(f, E_i).$$

$$J(f\cdot\chi_E) = \lim_{i\to\infty} J(f\cdot\chi_{E_i}); \quad \cancel{\mu(E_i)} < \infty.$$

Упр.: Сделать аккуратно. $\Longleftarrow$ $\underline{J(f, E_i) < \infty}$

Другие предельные переходы:

$f_n \nearrow f \qquad J(f_n) \nearrow J(f).$

Обозначение: $\int f\,d\mu = J(f).$

$$\boxed{\varliminf_{n\to\infty} \int f_n\,d\mu \geq \int \varliminf f_n\,d\mu}$$

Лемма Фату:

Док-во:

$$\varliminf_{n\to\infty} f_n(x) = \underbrace{\sup_n \inf_{k>n} f_k(x)}_{\nearrow \text{ и растущая.}}$$

$g_n(x) \nearrow.$

$$\int \varliminf_{n\to\infty} f_n\,d\mu =$$

$$= \lim_n \int g_n\,d\mu \leq$$

$g_n \leq f_n.$

$$\leq \varliminf \int f_n\,d\mu$$

Избавимся от требования $f \geq 0$.

$f: \mathfrak{X} \to \overline{\mathbb{R}}$

$$f^+(x) = \begin{cases} f(x), & f(x) > 0 \\ 0 & \leq 0. \end{cases}$$

$$f^-(x) = \begin{cases} 0 & f \geq 0 \\ -f(x) - \text{в противном случае} \end{cases}$$

Контроль: $f^{\pm}$ – измеримы

$$f = f_+ - f_-$$

$a^+ = \int f^+ d\mu$, $a^- = \int f^- d\mu$

Если $a^+, a^- = \infty$ то ф-ия не интегрир.

В противном случае

$$\boxed{\int f d\mu = \int f^+ d\mu - \int f^- d\mu}$$

Функция f – суммируема, если $\int f^+, \int f^- < \infty$.

$\sim \int |f| d\mu < \infty$.

Св-ва интеграла Лебега:

- Монотонность $f_1 \leq f_2 \Rightarrow \int f_1 d\mu \leq \int f_2 d\mu$.

$f_1 = f_1^+ - f_1^-$ Упражнение.

$f_2 = f_2^+ - f_2^-$

- f_1, f_2 – суммируемы: $\int (f_1 + f_2) d\mu = \int f_1 d\mu + \int f_2 d\mu$.

Теорема о предельных переходах под знаком и-ла.

Список: 1) Монотонный предельный переход (T1)
2) Лемма Фату. (T2)
3) Теорема о суммируемой мажоранте. (T3)

T1 $(\mathfrak{X}, \Sigma, \mu)$, $f_n(x)$, $f_n(x) \uparrow f(x)$

и $\int\limits_{\mathfrak{X}} f_1 \, d\mu < \infty$,

$$\Rightarrow \lim \int f_n \, d\mu = \int f \, d\mu.$$

Упр: Докажите.

Подсказка: $f_n - f_1 \geq 0$ $\quad f_n - f_1 \uparrow f - f_1$.

T3 О суммируемой мажоранте.

$(\mathfrak{X}, \Sigma, \mu)$, $f_n(x) \to f(x)$ п.-в.

$g(x) \geq 0 \quad \int g \, d\mu < \infty$

и $|f_n(x)|, |f(x)| \leq g(x)$.

$$\Rightarrow \quad \int f_n \, d\mu \longrightarrow \int f \, d\mu .$$