$(\mathcal{X}, \Sigma, \mu)$ И

$\{f_n\}$ $\quad \varliminf_{n\to\infty} \int f_n \, d\mu \ge \int \varliminf_{n\to\infty} f_n \, d\mu$

$\mathcal{X}$ - σ-конечно.

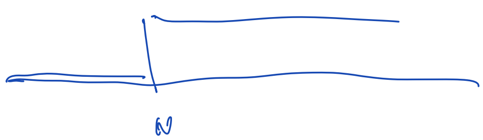
$f: \mathcal{X} \to \mathbb{R}$, $\quad f_n \nearrow f$

$$\Rightarrow \int f_n \, d\mu \nearrow \int f \, d\mu$$

Монотонная сход:

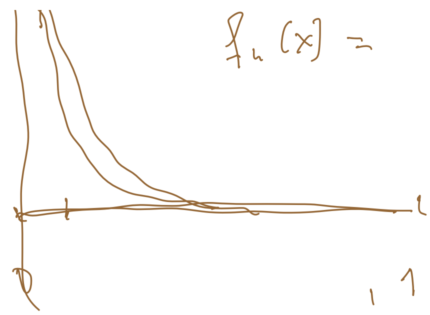
$$f_n \searrow f \overset{\cancel{}}{\Rightarrow} \lim_{n\to\infty} \int f_n \, d\mu \to \int f \, d\mu$$

$$\int f_1 \, d\mu < \infty$$



Упр Докажите это.

Подсказка: $f - f_n \nearrow$



$f_n(x) = \frac{1}{x}$

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & 0 < x < \frac{1}{n} \\ 0 & x > \frac{1}{n}. \end{cases}$$

Теорема о мажорируемой сходимости:

Дано: $\{f_n\}$, $f_n \to f$ п.в. x.

$\exists\, g \geq 0 \quad \int_X g\, d\mu < \infty.$

$$|f_n(x)|,\ |f(x)| < g(x)$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \int_X f_n(x)\, d\mu = \int_X f(x)\, d\mu.$$

Д-во:

$$\int [f_n(x) - f(x)]\, d\mu \overset{?}{\to} 0$$

$$n \to \infty.$$

$$h_n(x) = |f_n(x) - f(x)| \geq 0$$

$$h_n(x) < 2g(x) \Rightarrow \int h_n(x)\, d\mu < \infty.$$

Нам надо: $$\int h_n(x)\, d\mu \to 0$$

$$h_n(x) \to 0.$$

$$\tilde{h}_n(x) = \sup_{j \geq n} h_j(x) \quad \downarrow$$

$$\tilde{h}_n(x) \to 0, \qquad \int \tilde{h}_1(x)\, d\mu < \infty.$$

$$\Rightarrow \int |f_n(x) - f(x)|\, d\mu \to 0.$$

$$|h_j(x)| \leq 2g(x)$$

$f \geq 0, \qquad \int f\, d\mu < \infty.$

$E \in \Sigma \qquad J_f(E) = \int_E f\, d\mu.$

Абсолютно непрерывна.

Опред: λ и μ; λ - абсолютно непр. отн. μ.

если

$$\forall \varepsilon \quad \exists \delta: \quad \mu(E) < \delta \Rightarrow \lambda(E) < \varepsilon.$$

Утв: $f \geq 0$ - суммир.

$\Rightarrow$

$J_f(E)$ - абс. непр. по отн. к μ.

Док-во: Допустим нет:

$$\exists\, \varepsilon > 0: \ \forall \delta: \ E_\delta: \ \mu(E_\delta) < \delta \text{ и } \int_{E_\delta} f > \varepsilon.$$

Предположим что $\mu(\mathfrak{X}) < \infty$.

$$\delta_n = \frac{1}{2^n} \qquad E_n \qquad \int_{E_n} f\, d\mu > \varepsilon.$$

$$\mu(E_n) < \frac{1}{2^n}.$$

$$\bar E_n = \bigcup_{k\ge n} E_k \qquad \bar E_n \searrow.$$

$$\chi_{\bar E_n}(x) \searrow \chi_{\cap \bar E_n}$$

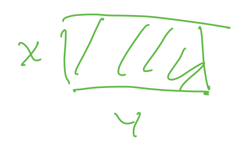
$$\mu(\cap \bar E_n) = 0 \qquad \mu(\bar E_n) \le \sum_k^{\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^{n-1}}$$

Произведения мер.

Было: $(\mathcal{X}, \Sigma, \mu)$, $(\mathcal{Y}, \mathfrak{S}, \nu)$

$$\mathcal{R} = \mathcal{X}\times\mathcal{Y} = \{\underbrace{X\times Y}_{=E},\ X\in\mathcal{X},\ Y\in\mathcal{Y}\}$$

$$\mu\otimes\nu\,(E) = \mu(X)\cdot\nu(Y).$$



Упр. Проверьте что это σ-аддитивна.

$(\mathcal{X}\times\mathcal{Y}, \mathcal{A}, \mu\otimes\nu)$. Продолжение по Каратеодори.

Пример:

^{n} ^{m}

$\mathcal{X} = \mathbb{R}$ λ_n, $\mathcal{Y} = \mathbb{R}$, λ_m

$\mathbb{R}^{m+n}$ λ_{m+n}.

$\lambda_{m+n} = \lambda_m \otimes \lambda_n$.

$(\mathcal{X}, \Sigma, \mu)$; $(\mathcal{Y}, \mathfrak{S}, \nu)$, $(\mathcal{X} \times \mathcal{Y}, \mathfrak{A}, \mu \otimes \nu)$

$F(x, y)$ $F : \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \to \mathbb{R}$.

Теорема Тонелли:

Если $F(x,y) \geq 0$ то все можно.

Пусть $F(x,y) \geq 0$, $F : \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \to \mathbb{R}$

F - измерима

Тогда:

1. При п.в. $x \in \mathcal{X}$ $\varphi_x : \mathcal{Y} \to \mathbb{R}$.

$\varphi_x : F(x, \cdot)$ - измерима.

$y \in \mathcal{Y}$ $\psi_y : F(\cdot, y)$ - измерима.

$$\psi_y : \mathcal{X} \to \mathbb{R}.$$

②

$$\left.\begin{aligned} \Phi(x) &= \int_{\mathcal{Y}} \varphi_x(y)\, d\nu \\ \Psi(y) &= \int_{\mathcal{X}} \psi_y(x)\, d\mu. \end{aligned}\right\} \text{ измеримы}$$

③

$$\int_{\mathcal{X}} \Phi(x)\, d\mu = \int_{\mathcal{Y}} \Psi(y)\, d\nu = \int_{\mathcal{X}\times\mathcal{Y}} F(x,y)\, d\mu\otimes d\nu.$$

$$\int_{\mathcal{X}} \left(\int_{\mathcal{Y}} F(x,y)\, d\nu \right) d\mu = \int_{\mathcal{Y}} \left(\int_{\mathcal{X}} F(x,y)\, d\mu \right) d\nu = \int_{\mathcal{X}\times\mathcal{Y}} F(x,y)\, d\mu\otimes d\nu.$$

$\square$

Теорема Фубини

$F(x,y)$ – суммируема.

$$\int_{\mathcal{X}}\left(\int_{\mathcal{Y}} F(x,y)\,d\nu\right)d\mu = \int_{\mathcal{Y}}\left(\int_{\mathcal{X}} F(x,y)\,d\mu\right)d\nu =$$

$$= \iint_{\mathcal{X}\times\mathcal{Y}} F(x,y)\,d\mu\otimes d\nu.$$

$$F(x,y) = F^{+}(x,y) - F^{-}(x,y)$$

$F(x,y)$ – суммируема: $\int F^{+}$ и $\int F^{-} < \infty$.

$$\int |F|\,d\mu\otimes d\nu < \infty.$$

Пространства суммируемых функций

$(\mathcal{X}, \Sigma, \mu)$ $\qquad L^{p}(\mathcal{X}, \Sigma, \mu)$, $p \geq 1$.

$$L^{1}(\mathcal{X}, \Sigma, \mu) = \left\{ f : \int_{\mathcal{X}} |f|\,d\mu < \infty \right\}.$$

$$\|f\|_{L^1} := \int_{\mathfrak{X}} |f(x)|\, d\mu.$$

! $f \sim g$ если $f - g = 0$ п.в

Примеры: $L^1(\mathbb{R}^n)$, $\ell^1 = L^1(\mathbb{Z}$, считающая мера$)$

$\ell^1 = \{x_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$, $\|\{x_k\}\| = \sum |x_k| < \infty$.

$L^1(0,1)$ $\quad \int_0^1 |f|\, dx < \infty$.

$L^1(0,1)$ – норм. пр-во:

1. $\|f\| \geq 0$, $f = 0 \Leftrightarrow \|f\| = 0$.

2. $\|\alpha f\| = |\alpha| \|f\|$ ✓

3. $\|f_1 + f_2\| \leq \|f_1\| + \|f_2\|$

Полнота:

$\{f_n\}$ – послед. Коши;

$\{f_n\} \subset L^1$

$\Rightarrow \exists f \in L^1 :\quad \|f_n - f\| \to 0$.

Напоминание: $\{f_n\}$ — послед. Коши если
$\|f_n - f_m\| \to 0,\ m, n \to \infty$.

Часть 1 Строим кандидата:

Наивная попытка: $f_1 + (f_2 - f_1) + (f_3 - f_2) + \ldots$

$\{n_k\}$:
$$\| f_{n_k} - f_{n_{k+1}} \| \le \frac{1}{2^k}$$

$\forall \delta : \exists N_\delta,\ m, n > N_\delta \quad \|f_m - f_n\| < \delta$.

$\delta_k = \frac{1}{2^k}$.

$n_1 > N_{\frac{1}{2^1}} : \quad \|f_{n_1} - f_{n_2}\| < \frac{1}{2}$.

$n_2 > N_{\frac{1}{2^2}}$.

$\ldots$

$$\sum \| f_{n_k} - f_{n_{k+1}} \| < \infty.$$

$$\infty > \sum \int | f_{n_k}(x) - f_{n_{k+1}}(x) | \, d\mu =$$

$$= \int \underbrace{\sum | f_{n_k}(x) - f_{n_{k+1}}(x) |}\, d\mu$$

$$\boxed{\underline{f}(x) = \lim_{k\to\infty} f_{n_k}(x)}$$

<u>Часть 2</u> $\quad \| f_n(x) - f(x) \| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

$$\| f_n(x) - f(x) \| \le$$

$$\le \underline{\| f_n(x) - f_{n_k}(x) \|} + \underline{\| f_{n_k}(x) - f(x) \|}$$

$\underline{\underline{L^1(R)}}$ $\quad$ <u>Утверждение:</u>

$C_0(\mathbb{R})$ — $\{f(x), x \in \mathbb{R}, f$ — непр. $\operatorname{supp} f$ — компактен $\}$.

Утверждение:

$C_0(\mathbb{R})$ — плотно в $L^1(\mathbb{R})$.

Док-во:

- $\forall f \in L^1(\mathbb{R})$; $f_N(x) = \begin{cases} f(x), & |x| < N \\ 0 & |x| > N. \end{cases}$

Тогда $\| f - f_N \| \to 0$, $N \to \infty$.

- $\forall N$ $\exists$ g_k — простые ф-ии, $g_k \to f_N$

$$f_N = f_N^+ - f_N^-$$

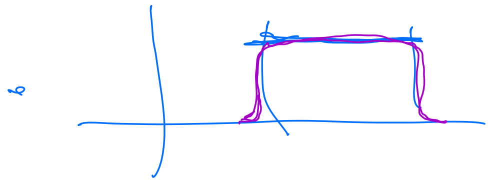
- Нам надо приближать ф-ии вида χ_E.

- Выберем $\{I_k\}$ — интервалы: $I_k \cap I_j = \emptyset$

$$\cup I_k \supset E$$

$$mes(\cup I_k \setminus E) < \varepsilon.$$

χ_E — приближаем $\sum \chi_{I_k}$



Это же верно в $L^1(\mathbb{R}^n)$

<u>Интересный случай</u> $L^1(0,1)$

<u>Теорема (Мюнца)</u> $\{t^{\lambda_n}\}_n$

$$0=\lambda_0 \le \lambda_1 < \lambda_2 < \dots$$

<u>След. утв. эквивалентны:</u>

1) $f \in C[0,1]$ — f — можно равномерно приблизить "обобщенными полиномами"

$$\sum_{0}^{N} \alpha_k t^{\lambda_k}$$

2) $\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k} = \infty.$

<u>Общий случай</u>

$(\mathfrak{X}, \Sigma, \mu)$, $\mathfrak{X}$ — топологическое пр-во

$\mathcal{B}(\mathfrak{X}) \subset \Sigma.$

Предположения: 1) $\forall x, y \in \mathfrak{X}$; $\exists V_x, V_y$; $V_x \cap V_y = \emptyset$

2) Мера регулярна:

$E \subset \Sigma$; $\mu(E)$

$\forall \varepsilon > 0$ $\exists K \subset E$ — компакт, $G \supset E$ — открытое.

$\mu(E \setminus K) < \varepsilon$; $\mu(G \setminus E) < \varepsilon$

Докажете пожалуйста.

Утверждение: Непрерывные суммируемые ф-ции плотны в $L^1(\mathfrak{X}, \Sigma, \mu)$.

Лемма Урысона:

Дано: $\mathfrak{X}$ — Хаусдорфово; $K \subset \mathfrak{X}$ — компакт
$G \subset \mathfrak{X}$ — открыто
$G \supset K$.

Тогда:

$\exists f : \mathfrak{X} \to [0, 1]$, f — непрерывна

$$f\big|_K = 1, \quad f\big|_{\mathfrak{X} \setminus G} = 0$$

Свертка:

$f, g \in L^1(\mathbb{R})$.

$$h(t) = (f * g)(t) =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(t-\tau)\, g(\tau)\, d\tau.$$

$$\sum a_n t^n \cdot \sum b_n t^n = \sum c_j t^j$$

$$c_j = \sum a^l b^{j-l}$$

Свойства свертки:

$$f * g = g * f.$$

$$f * (g_1 + g_2) = f * g_1 + f * g_2.$$

$f * g \in L^1$; $\quad \| f * g \| \le \| f \| \cdot \| g \|. \quad (*)$

Доказать: следующее. $(*)$

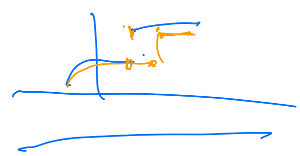
$$\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty}|f(t-\tau)||g(\tau)|\,d\tau\right)dt =$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}|g(\tau)|\underbrace{\left(\int_{-\infty}^{\infty}|f(t-\tau)|\,d(t-\tau)\right)}_{=\|f\|}d\tau$$

$$=\|f\|\,\|g\|$$

Упр: Докажите коммутативность и ассоциативность.

Сдвиг: $f\in L^1(\mathbb{R})$



Утверждение: $f\in L^1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \|f(t)-f(t+\tau)\|\to 0,\quad \tau\to 0$$

g – непрерывна и с конечным носит.

$$\|g(t)-g(t+\tau)\|\to 0,\quad \tau\to 0.$$

$f\in L^1(\mathbb{R})$, $\varepsilon>0$. δ: $|\tau|<\delta$

$$\|f(t)-f(t+\tau)\|<\varepsilon.$$

$g \in C_0(\mathbb{R})$: $\quad \|g - f\| \le \frac{\varepsilon}{3}$

$\|f(t) - f(t+\tau)\| \le$

$$\le \|f(t) - g(t)\| + \underbrace{\|g(t) - g(t+\tau)\|} +$$

$$+ \|g(t+\tau) - f(t+\tau)\|$$