Основные темы лекции.

1. Пространства L^p – окончание
2. Интеграл Лебега vs интеграл Римана.
3. Теорема Радона-Никодима.

① L^p - spaces

Полнота

$(\mathfrak{X}, \Sigma, \mu)$, $p \geq 1$, $L^p(\mu) = \{f : \|f\|_p = (\int_{\mathfrak{X}} |f|^p d\mu)^{1/p} < \infty\}$

Осталось доказать с прошлой лекции: $L^p(\mu)$ – полное: $\{f_n\} \subset L^p(\mu)$, $\|f_n - f_m\|_p \to 0 \Rightarrow \exists f \in L^p(\mu)$:

$\|f_n - f\|_p \to 0$

Предположение: μ-σ-конечна: $\mathfrak{X} = \bigcup_n E_n$, $\mu(E_n) < \infty$, $E_n \cap E_j = \emptyset$.

① Конечная мера: $\mu(E) < \infty$, $\{f_n\} \subset L^p(\mu, E)$, $\|f_n - f_m\|_p \to 0$, $m, n \to \infty$

$\overset{?}{\Longrightarrow} \exists f \in L^p(\mu, E) : \|f_n - f\|_2 \to 0.$

a. Строим f:

$$\|f_m - f_n\|_1 \leq C \|f_n - f_m\|_p.$$

$$\Rightarrow \exists f \in L^1 : \|f_m - f\|_1 \to 0, \quad m \to \infty.$$

b) Сходимость к f в $L^p(E, \mu)$

$\|f_m - f_n\| \to 0$, $m, n > N_\varepsilon \Rightarrow \|f_{m_k} - f_{m_n}\|_p < \varepsilon \Rightarrow \int_E |f_{m_k} - f|^p d\mu < \varepsilon$, $k > N_\varepsilon$

$f_{m_k} \to f$ п.в.

∞.

Теорема Фату $g_n \geq 0$, $\mu(E) < \infty$ $g_n \to g$ п.в.

$$\int g_n\,d\mu \le K \Rightarrow \int g\,d\mu \le K.$$

$$\varphi_n(x) = \inf_{k\ge n} g_k(x) \searrow g.$$

Доказательство сходимости.

$$\int_E |f_{n_k} - f|^p\,d\mu < \varepsilon \qquad k > N_\varepsilon.$$

$$\Rightarrow f \in L^p(E) \qquad f_{n_k} \xrightarrow{L^p} f.$$

$$\text{Cauchy} \Rightarrow f_n \xrightarrow{L^p} f.$$

b) Бесконечная мера

$$\int_{\mathfrak{X}} |f_n - f_m|^2\,d\mu < \varepsilon \Rightarrow \sum_1^\infty \int_{E_k} |f_n - f_m|^2\,d\mu < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \sum_1^M \int_{E_k} |f_n - f_m|^2\,d\mu < \varepsilon \qquad n,m > N_\varepsilon \qquad m \to \infty.$$

не зависит от M!

$$\Rightarrow \sum_1^M \int_{E_k} |f_n - f|^2\,d\mu < \varepsilon \Rightarrow \sum_1^\infty \int_{E_k} |f_n - f|^p\,d\mu < \varepsilon$$

B. Пространство L^∞

1. Определение ess sup, ess inf.

~~$\mu(\mathfrak{X}) < \infty$~~; f $\quad |f(x)| < M.$

$$\operatorname{ess\,sup}_{\mathfrak{X}} |f| = \inf_{\mu(E)=0} \sup\{|f(x)|,\ x \in \mathfrak{X}\setminus E\}$$

$$\operatorname{ess\,inf}_{\mathfrak{X}} |f| =$$

2. Пространство L^∞

$L^\infty(\mathfrak{X}) = \{ f;\ \|f\|_\infty := \operatorname{ess\,sup} |f| < \infty \}$ — з.

~~Проверьте~~ Продумайте то, что это норма.

3. $f(t) = a\chi_E(t)$, $\mu(E) < \infty$, $a > 0$

$\|f\|_p \to a, \quad p \to \infty.$

$$\|f\|_p = \left(\int_E a^p \, d\mu \right)^{1/p} = \mu(E)^{1/p} \cdot a \xrightarrow[p \to \infty]{} a.$$

4. Упражнение:

$\mu(\mathfrak{X}) < \infty$, $\operatorname{ess\,sup} f < M.$

$\Rightarrow \|f\|_p \to \|f\|_\infty, \quad p \to \infty.$

Вопрос: $\mu(\mathfrak{X}) < \infty$, $f \in \bigcap_{p \geq 1} L^p(\mathfrak{X})$

Можно ли утверждать, что $f \in L^\infty(\mathfrak{X})^{*}$ - ?

5). Игры с пространствами L^p

- Шары
- Функционалы.

$\mathfrak{X}$ - нормированное пр-во: над $\mathbb{C}$

Φ - огр. лин. функционал : $\Phi : \mathfrak{X} \to \mathbb{C}$

1) $\Phi(\alpha x + \beta y) = \alpha \Phi(x) + \beta \Phi(y)$

2) $|\Phi(x)| \leq C \|x\| \quad \forall x \in \mathfrak{X}$

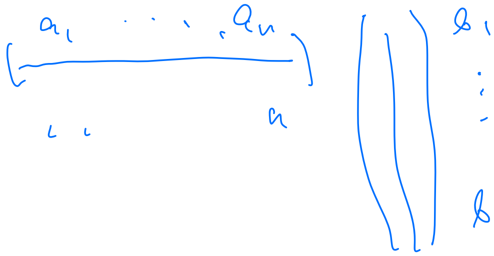
$\inf C = \|\Phi\|$.

Сопряженное пр-во:

$$\{\Phi;\} = \mathfrak{X}^*$$

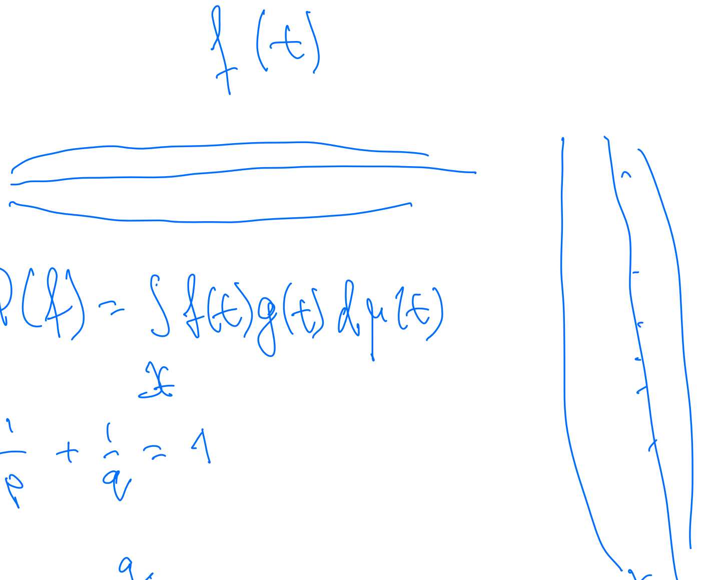
<u>Примеры:</u> $p \geq 1$; (T, Σ, μ)

$$\mathfrak{X} = L^p(T, \Sigma, \mu)$$



$\sum a_n b_n = \Phi(\{a_n\})$

b_n — (b_n) — ф-нал.



$$\Phi(f) = \int_{\mathfrak{X}} f(t) g(t) \, d\mu(t)$$

$g(t)$

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

$g \in L^q(\mu)$ $\quad \Phi_g \in (L^p(\mu))^*$ $\quad \Phi_g(f) = \int_T f(t) g(t) \, d\mu.$

Гёльдер

$\Downarrow$

$$\|\Phi_g\| \le \|g\|_{L^q}$$

Упражнение: $\|\Phi_g\| = \|g\|_{L^q}$

Факт: $p \in [1, \infty)$ $\quad (L^p)^* = L^q$, в

Конец L исборм.

(НЕ): $(L^\infty)^* \supset L^1$

Часть 2   Riemann vs Lebesgue

Теорема $[a,b]$, $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, $\exists\, I = (R)\int_a^b f(x)\,dx$.

$\Rightarrow$ f - интегрируема по Лебегу; $\int_{[a,b]} f\,d\lambda = I$.

Доказательство: Инт. по Риману:  $a = t_0 < \dots < t_N = b$. $\quad T = \{t_k\}$

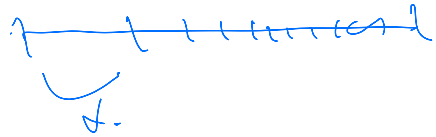
$\Delta_k = [t_k, t_{k-1}]$.

$M_k = \sup_{\Delta_k} f$, $\quad m_k = \inf_{\Delta_k} f$.

$$\overline{\Sigma}_T(f,[a,b]) = \sum |\Delta_k|\cdot M_k.$$

$$\underline{\Sigma}_T(f,[a,b]) = \sum |\Delta_k|\, m_k.$$

$$d(T) = \max_k |\Delta_k|$$



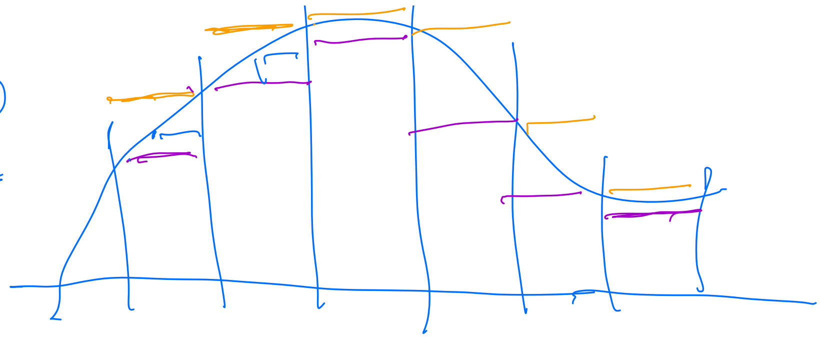
f - интегр. по Риману

$$\lim_{d(T)\to 0} \overline{\Sigma}_T \Rightarrow \Sigma$$

$$(R)\int_a^b f(t)\,dt.$$

$$\lim_{d(T)\to 0} \underline{\Sigma}_T \to \Sigma$$

$\underline{f \geq 0}$



$$\tau_n = \left\{ a + k\frac{b-a}{2^n},\ k = 0, \dots, 2^n \right\}$$

$$\Delta_{n,k} = \left[a + k\frac{b-a}{2^n},\ a + (k+1)\frac{b-a}{2^n} \right],$$

$$\overline{f}_n = \sum_{k=1}^{\infty} M_{kn} \frac{b-a}{2^n}, \qquad \overline{f}_n \downarrow$$

$$\underline{f}_n = \sum_{k=1}^{\infty} m_{kn} \frac{b-a}{2^n}, \qquad \underline{f}_n \uparrow$$

$$\overline{\Sigma}_{\tau_n} = \int \overline{f}_n \, d\mu; \quad \underline{\Sigma}_{\tau_n} = \int \underline{f}_n \, d\lambda_1$$

$$\lim \left(\overline{\Sigma}_{\tau_n} - \underline{\Sigma}_{\tau_n} \right) = 0$$

$$\lim \underline{\Sigma}_{\tau_n} = \int f \, d\lambda_1$$

Упражнение: Сделайте это в $\mathbb{R}^d$.

* * *

Замена переменных.

$G_1, G_2 \subset \mathbb{R}^d$, открытые.

гомеоморфизм.

$F: G_1 \to G_2$; $F \in C^1$, и $\in C^1$.

Утв.:

$$\boxed{\int_{x \in G_1} f(F(x))\, d\lambda_d = \int_{x \in G_1} f(x)\, |J(x)|\, d\lambda_d.}$$

$F(x) = (F_1(x), \ldots, F_d(x))$

$$J(x) = \left| \det \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial x_d} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial F_d}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial F_d}{\partial x_d} \end{pmatrix} \right|$$

Две схемы док-ва:

1. (Риман)

- Напишите суммы Дарбу.
- V На каждом "интервальчике" замените F на линейную ф-ю.
- Ошибка $\to 0$ при измельчении подразбиения.

2). (Лебега).

- Рассмотрите "простые" ф-ции
- Аппроксимируйте f простыми, перейдите к пределу.

Комментарии к заданию.

1). $u = (u_1, \dots, u_d) = F(x_1, \dots, x_d)$

$$F(\vec{x}+\Delta\vec{x}) - F(\vec{x}) =$$

$$u_1(x+\Delta x) \approx u_1(x) + \sum_{j=1}^{d} \frac{\partial F_1}{\partial x_j}\Delta x_j + o(\Delta x)$$

$$u_1(x+\Delta x) - u_1(x) = \sum_{j=1}^{d} \frac{\partial F_1}{\partial x_j}\Delta x_j + o(\Delta x)$$

$$\vec{u}(x+\Delta x) - \vec{u}(x) = \underline{\underline{\begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial x_d} \\ \dots & & \dots \\ \frac{\partial F_d}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial x_d} \end{pmatrix}}} \cdot \underline{\underline{\Delta x}} + o(\Delta).$$

Как меняется площадь при действии линейной части:

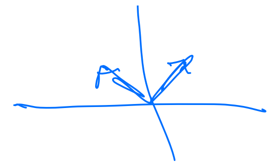
$$x \longrightarrow Ax \quad - \quad A \text{ - матрица},$$

$$E \subset R^d; \quad \lambda_d(AE) = |\det A|\, \lambda_d(E).$$

1) Дост. док. для $\square$

2) $(d=2)$ - $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ - то это

очевидно.



3) Выбор базиса не важен.

4) $$A = O \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_d \end{pmatrix}$$

ортогональная матрица

$|\det O| = 1$ $\qquad$ $|\det A| = |\lambda_1 \cdots \lambda_d|$

Теорема Радона-Никодима.

$(\mathfrak{X}, \Sigma, \nu, \mu)$ $\qquad$ $\nu(\mathfrak{X}) < \infty$.

μ – σ-конечна.

Определение: $\nu \ll \mu$ – подчинение

если $E \in \Sigma$, $\quad \mu(E) = 0 \Rightarrow \nu(E) = 0$

$\mathfrak{X}$, $\Sigma \subset 2^{\mathfrak{X}}$

σ-алгебра:

–

$\mu : \Sigma \to \mathbb{R}_+$

σ-аддитивное.

Пример: $f \geq 0$, $f \in L^1(\mu)$

Тогда $\nu(E) = \int_E f \, d\mu$.

$\mu(E) = 0 \Rightarrow \nu(E) = 0$

Теорема Радона-Никодима:

Дана

- (X, Σ, μ, ν), μ - σ-конечная

ν - конечна

и $\nu < \mu$ $(\mu(E) = 0 \Rightarrow \nu(E) = 0,\ E \in \Sigma)$

Тогда $\exists f \in L^1(\mu)$:

$\nu(E) = \int_E f \, d\mu$, $\forall E \in \Sigma$.

$F \to G_1 \to G_2$

$$\int_E d\lambda_n = \int \chi_E \, d\lambda_n =$$

$$= \int \chi_E |J| \, d\lambda_n$$

Пусть ν — σ-конечна; и

$$\nu(E) = \int_E f \, d\mu, \quad f \in L^1$$

$$\mathcal{X} = \bigcup \mathcal{X}_n, \quad \nu(\mathcal{X}_n) < \infty$$

$$\nu(E) = \int f \, d\mu, \quad f \notin L^1(\mu, \mathcal{X})$$

$$f \in L^1(\mathcal{X}_n, d\mu)$$

Название:

f — плотность ν по отношению к μ.

Как это выглядит в $\mathbb{R}^d$;

$\mu = \lambda_d$; $h(x) \in L^1(\mathbb{R}^d)$.

$$\nu(E) = \int_E h\, d\mu.$$

$\nu(E)$: обладает σ-аддитивн.

$$E = \bigcup_n E_n, \quad E_i \cap E_j = \emptyset$$

$$\nu(E) = \sum_i \nu(E_i)$$

Но $\nu(E) \geq 0$ – этого нет!

$$h^+ = \begin{cases} h & h(x) \geq 0 \\ 0 & < 0 \end{cases}$$

$$h = h^+ - h^-$$

$$h^- = \begin{cases} 0 & h \geq 0 \\ -h & h < 0. \end{cases}$$

$E = E^+ \cup E^-$ $\quad E^\pm = \operatorname{supp} h^\pm$

$$\nu(E) = \underset{h^+}{\nu_+(E)} - \underset{h^-}{\nu_-(E)}$$

Причина #1 σ-аддитивные но не знакоопред. ф-ии на Σ

"заряд"

Теорема Хана: $(\mathcal{X}, \Sigma, \nu)$

ν. заряд

$$\mathcal{X} = \mathcal{X}_+ \cup \mathcal{X}_-$$

$$\nu_+ : \mathcal{X}_+ \to \overline{\mathbb{R}}_+$$

$$\nu_- : \mathcal{X}_- \to \overline{\mathbb{R}}_+$$

$$\nu(E) = \nu_+(E \cap \mathcal{X}_+) - \nu_-(E \cap \mathcal{X}_-).$$

$\mathcal{X} = \mathbb{R}^d$, $\quad h \in L^1(\mathbb{R}^d)$

$$\nu(E) = \int_E h \, d\lambda_d.$$

КАК: восстановить h по ν?

$d=1 \qquad \nu(a,b) = \int_a^b h\,dx$

$$h(x) = \frac{1}{2\varepsilon} \int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} h\,dx = \frac{1}{2\varepsilon}\,\nu(x-\varepsilon, x+\varepsilon)$$

Общий случай:

Для почти всех x:

$$h(x) = \lim_{r\to 0} \frac{1}{|B_r|} \int_{B_r(x)} h\,d\lambda_d = \lim_{r\to 0} \frac{1}{|B_r|}\,\nu(B_r)$$

$B_r(x)$ — шар радиуса r с центром в x

$|B_r|$ — объем шара.

Следствие: $E \subset \mathbb{R}^d$ — измеримое множество, $0 < \mu(E) < \infty$.

$$h = \chi_E$$

Для почти всех x:

$$h(x) = \lim_{r\to 0} \frac{1}{|B_r|} \int_{B_r(x)} h \, d\lambda_d =$$

$$\alpha(x) \to = \lim_{r\to 0} \frac{1}{|B_r|} \lambda_d(E \cap B_r(x)) =$$

$$= \begin{cases} 1 & \text{п.в. на } E \\ 0 & \text{п.в. вне } E. \end{cases}$$

$\alpha(x) = 1$ п.в. на E.

$\{x \in E;\ \alpha(x) = 1\}$ – точки плотности E.