

Занятие 11. Теория меры и немножко теорема Стокса

16.11.21

Старые задачи

1. Пусть последовательность μ -интегрируемых функций f_n сходится к f в $L^1(\mu)$, а последовательность μ -измеримых функций ϕ_n равномерно ограничена и сходится к ϕ μ -почти всюду. Докажите, что $\phi_n f_n$ сходится к ϕf в $L^1(\mu)$.
2. Пусть отображение $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ измеримо по Борелю. Тогда его график $\{(x, f(x)); x \in \mathbb{R}^k\}$ является Борелевским множеством в $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k$.
3. Пусть μ вероятностная мера и неотрицательная μ -интегрируемая функция f такова, что $\log f \in L^1(\mu)$. Докажите

$$\lim_{a \rightarrow +0} \int \frac{f^a - 1}{a} d\mu = \int \log f d\mu.$$

Подсказка: Воспользуйтесь теоремой о мажорируемой. сходимости.

4. Пусть функция $f \in L^1(\mathbb{R})$. Докажите, что ряд $\sum_n |f(x+n)|^2$ сходится при почти всех $x \in \mathbb{R}$.

Неравенства для интегралов

5. Пусть $1 \leq r, p_1, \dots, p_n < \infty$ и $1/p_1 + 1/p_2 + \dots + 1/p_n = 1/r$ и $f_j \in L^{p_j}(\mu), j = 1, \dots, n$. Тогда

$$\left(\int_{\mathfrak{X}} |f_1 \cdots f_n|^r d\mu \right)^{1/r} \leq \left(\int_{\mathfrak{X}} |f_1|^{p_1} d\mu \right)^{1/p_1} \cdots \left(\int_{\mathfrak{X}} |f_n|^{p_n} d\mu \right)^{1/p_n}.$$

6. (*Неравенство Минковского для интегралов.*) Пусть $(\mathfrak{X}, \mathfrak{A}, \mu), (\mathfrak{Y}, \mathfrak{B}, \nu)$ два пространства с σ -конечными мерами и f это $\mu \otimes \nu$ измеримая функция и $p > 1$. Докажите, что

$$\| \int_{\mathfrak{Y}} f(x, y) d\nu_y \|_{L^p(\mu_x)} \leq \int_{\mathfrak{Y}} \|f(x, y)\|_{L^p(\mu_x)} d\nu_y$$

7. (*Неравенство Минковского для интегралов. Продолжение.*) Пусть $(\mathfrak{X}, \mathfrak{A}, \mu), (\mathfrak{Y}, \mathfrak{B}, \nu)$ два пространства с σ -конечными мерами и f это $\mu \otimes \nu$ измеримая функция. Докажите, что при $1 \leq p < q < \infty$ верно

$$\int_{\mathfrak{Y}} \left(\int_{\mathfrak{X}} |f(x, y)|^p d\mu(x) \right)^{q/p} d\nu(y) \leq \left(\int_{\mathfrak{X}} \left(\int_{\mathfrak{Y}} |f(x, y)|^q d\nu(y) \right)^{p/q} d\mu(x) \right)^{q/p}$$

8. Пусть функция f суммируемая на $[0, 1]$ и $f(x) > 0$ при всех x . Тогда для каждого $\epsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое что

$$\int_E f(x) dx \geq \delta$$

для каждого множества E имеющего меру не меньше ϵ .

Новые задачи

Немного кратных интегралов

- Пусть S - гладкая замкнутая поверхность в \mathbb{R}^3 . Доказать равенство

$$\int \int_S \cos(\mathbf{n}, x) ds = 0,$$

здесь (\mathbf{n}, x) - угол между внешней нормалью к поверхности и осью x -ов.

- Пусть S - гладкая замкнутая поверхность в \mathbb{R}^3 . Посчитать интеграл

$$\int \int_S (x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma) ds,$$

здесь α, β, γ - углы внешней нормали к поверхности S .