Занятие 11. Интегралы по поверхностям

16.11.21

Старые задачи

Интегралы по кривым и поверхностные интегралы

1. Пусть функция f суммируемая на $[0,1]$ и $f(x) > 0$ при всех x. Тогда для каждого $\epsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое что
$$\int_E f(x)dx \geq \delta$$
для каждого множества E имеющего меру не меньше ϵ .

2. Вычислите интеграл $\int\limits_\Gamma F(s)\, d\mathcal{H}_2(s)$, где
   (a) Γ — часть параболоида $z = x^2+y^2$, выделяемая условием $z \leq 1$, $F(x,y,z) = |xyz|$;
   (b) Γ — часть конической поверхности $z = \sqrt{x^2+y^2}$, лежащая внутри цилиндра $x^2+y^2 = 2x$, $F(x,y,z) = xy + xz + yz$;
   (c) Γ — часть конической поверхности $z = \sqrt{x^2+y^2}$, лежащая внутри цилиндра $x^2+y^2 = 2x$, $F(x,y,z) = x^2y^2 + x^2z^2 + y^2z^2$;

Новые задачи

1. Вычислите интеграл $\int\limits_\Gamma F(s)\, d\mathcal{H}_2(s)$, где
   (a) Γ — единичная сфера в $\mathbb{R}^3$, $f(x,y,z) = x+y+z$;
   (b) Γ — единичная сфера в $\mathbb{R}^3$, $F(x,y,z) = e^{2\pi i a x}$;
   (c) Γ — единичная сфера в $\mathbb{R}^3$ и $F(x,y,z) = (x^2+y^2+(z-2)^2)^{-\frac{1}{2}}$;
   (d) Γ — граница тетраэдра $x+y+z \leq 1, x,y,z \geq 0$, $F(x,y,z) = (1+x+y+z)^{-2}$.

2. Найдите центр масс кардиоиды, кривой на плоскости, задаваемой уравнением $r = a(1+\cos\varphi)$ в полярных координатах.