

# Занятие 01. Комплексные числа, интегралы и аналитические функции

15.02.22

## Комплексные числа

1. Какие кривые задаются параметрическими уравнениями

- (a)  $z(t) = t + it^2, t \in \mathbb{R};$
- (b)  $z(t) = t + i/t, t > 0;$
- (c)  $z(t) = ae^{it} + 1/(ae^{it}), t \in [0, 2\pi];$
- (d)  $z(t) = e^{i\pi/4} \cos t, t \in [0, 2\pi].$

2. Описать множества  $f(E)$  когда

- (a)  $f(z) = z^2, E = \{z : \pi/4 < \arg z < 3\pi/4\};$
- (b)  $f(z) = e^z, E = \{z : \operatorname{Re} z > 1, -\pi/4 < \operatorname{Im} z < \pi/3\}$   
*а что будет, если взять  $E = \{z : \operatorname{Re} z > 1, -\pi < \operatorname{Im} z < 2\pi\}?$ ;*
- (c)  $f(z) = z + 1/z, E = \{z : |z| > 1\}$   
*а что будет, если взять  $E = \{z : |z| < 1\}?$*

3. Найти все решения уравнений

•  $z^2 = 3 - 4i, \bullet z^7 + 1 = 0, \bullet \bar{z} = z^3.$

4. Даны два треугольника с вершинами в точках  $z_1, z_2, z_3$  и  $w_1, w_2, w_3$  соответственно. Они подобны, если

$$\frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2} = \frac{w_3 - w_1}{w_3 - w_2}.$$

Является ли это условие необходимым?

5. Пусть  $z_1, z_2, z_3$  - три вершины параллелограмма, записанные в порядке обхода границы. Найти четвертую вершину.

## Немного интегралов

6. Посчитайте интегралы

- (a)  $\int_0^1 \frac{dt}{1+it};$
- (b)  $\oint_{\gamma} z^n dz, \gamma = \{z : |z| = R\}, n \in \mathbb{Z};$
- (c)  $\oint_{\gamma} \frac{(z+1)(z-1)(z+2)}{z^2} dz, \gamma = \{z : |z| = 10\};$

## Функции

7. Пусть  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$  непрерывно дифференцируема. Положим  $\lambda = f(1) - f(0)$ . Верно ли что
- 1) Найдется  $t \in [0, 1]$  такое, что  $f'(t) = \lambda$ ?
  - 2)  $\lambda$  принадлежит выпуклой оболочке множества  $\{f'(t); t \in [0, 1]\}$ ?
8. Запишите условия Коши-Римана в полярных координатах
9. В каких точках комплексной плоскости обращаются в ноль функции  $\sin z$  и  $\cos z$ ?
10. В каких областях голоморфны следующие функции:  
 $e^z := e^{x+iy}$ ,  $\tan z$ ,  $\log z := \log |z| + i \arg z$ ,
11. Пусть функция  $f(z)$  голоморфна и или  $\operatorname{Re} f(z) = \operatorname{const}$  или  $|f(z)| = \operatorname{const}$ . Тогда  $f(z) = \operatorname{const}$ .  
А что если  $\operatorname{Re}(e^{i\pi/4} f(z)) = \operatorname{const}$  ?