

# Занятие 04. Степенные ряды, вычеты, интегралы

15.03.22

## Старые задачи

1. Определите радиус сходимости

$$\sum_0^{\infty} z^{n!}, \sum_0^{\infty} (\cos in) z^n, \sum_0^{\infty} \frac{n^2}{2^{2^n}} z^n.$$

2. Найдите сумму ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} n z^n$

3. Посчитайте все возможные значения интеграла

$$\int_{\gamma} \frac{e^z}{z(z^2 - 1)} dz$$

при всех возможных позициях замкнутого контура  $\gamma$ , предполагая, что этот контур не проходит через точки  $0, \pm 1$ .

## Новые задачи

1. Посчитать вычеты следующих функций во всех их изолированных особых точках. В каких случаях можно говорить о вычете в бесконечности?

a)  $\frac{1}{z^3 - z^5}$ ;

b)  $\frac{z^2}{(z^2 + 1)^2}$ ;

c)  $\tan z$ ;

d)  $e^{z+1/z}$ .

2. Вычислите интегралы:

(a)  $\int_{\partial\Omega} \frac{dz}{1-z^4}$ , где  $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : |z - 1| < 1\}$ ;

(b)  $\int_{\partial\Omega} \frac{dz}{1+z^4}$ , где  $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : |z - 1| < 1\}$ ;

(c)  $\int_{\partial\Omega} \frac{dz}{(z^2-1)^2(z-3)^2}$ , где  $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : 2 < |z| < 4\}$ ;

(d)  $\int_{\partial\Omega} \frac{\sin z}{(z+1)^3} dz$ , где  $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 10\}$ .

3. Вычислите интегралы:

(a)  $\int_{\partial\Omega} z \cos\left(\frac{z}{z+1}\right) dz$ , где  $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : |z| > 2\}$ ;

(b)  $\int_{\partial\Omega} \frac{\operatorname{ctg} z}{z} dz$ , где  $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : |z| > 1\}$ ;

(c)  $\int_{\partial\Omega} \frac{\sin z}{(z^3-z)(z-i)} dz$ , где  $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : |z - 1| < 1\}$ .

4. Вычислите интегралы:

a)  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^4+1}$ ,

b)  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^3 x}{x(x^2+1)} dx$ .