Занятие 02. Интегралы, аналитические и гармонические функции

22.02.22

Старые задачи

Функции

1. Пусть $f : [0,1] \to \mathbb{C}$ непрерывно дифференцируема. Положим $\lambda = f(1) - f(0)$. Верно ли что
   1) Найдется $t \in [0,1]$ такое, что $f'(t) = \lambda$?
   2) λ принадлежит выпуклой оболочке множества $\{f'(t); t \in [0,1]\}$?

2. Запишите условия Коши-Римана в полярных координатах

3. В каких точках комплексной плоскости обращаются в ноль функции $\sin z$ и $\cos z$?

4. В каких областях голоморфны следующие функции:
   $e^z := e^{x+iy}$, $\tan z$, $\log z := \log |z| + i \arg z$,

5. Пусть функция $f(z)$ голоморфна и или $\operatorname{Re} f(z) = \text{const}$ или $|f(z)| = \text{const}$. Тогда $f(z) = \text{const}$.
   А что если $\operatorname{Re}(e^{i\pi/4} f(z)) = \text{const}$ *?*

Новые задачи

1. При каких значениях α сходятся интегралы

$$\int_1^\infty \frac{e^{it}}{t^\alpha} dt, \quad \int_1^\infty \frac{e^{i \log t}}{t^\alpha} dt.$$

2. Пусть γ - спрямляемая кривая, f, g непрерывны на γ. Доказать неравенство Шварца:

$$\left| \int_\gamma f(z) g(z) dz \right|^2 \le \int_\gamma |f(z)|^2 |dz| \int_\gamma |g(z)|^2 |dz|$$

   А как насчет неравенств Гельдера и Минковского ?

3. Проверить, что класс аналитических функций замкнут относительно алгебраических операций (знаменатель не должен обращаться в ноль, ясное дело) и композиции.

4. Найти сопряженные к следующим гармоническим функциям:

   $u(x, y) = xy,\ u(x, y) = x^2 - y^2,\ u(x, y) = y \cos y \operatorname{sh} x + x \sin y \operatorname{ch} x,\ u = r\phi \cos \phi + r \log r \sin \phi$

5. Выразить оператор Лапласа $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ в терминах производных по z и $\bar{z}$, а также в полярных координатах.