

Занятие 03. Аналитические и гармонические функции, степенные ряды

01.03.22

Старые задачи

1. При каких значениях α сходятся интегралы

$$\int_1^{\infty} \frac{e^{it}}{t^\alpha} dt, \quad \int_1^{\infty} \frac{e^{i \log t}}{t^\alpha} dt.$$

2. Пусть γ - спрямляемая кривая, f, g непрерывны на γ . Доказать неравенство Шварца:

$$\left| \int_{\gamma} f(z)g(z)dz \right|^2 \leq \int_{\gamma} |f(z)|^2 |dz| \int_{\gamma} |g(z)|^2 |dz|$$

А как насчет неравенств Гельдера и Минковского ?

3. Проверить, что класс аналитических функций замкнут относительно алгебраических операций (знаменатель не должен обращаться в ноль, ясное дело) и композиции.
4. Найти сопряженные к следующим гармоническим функциям:

$$u(x, y) = xy, \quad u(x, y) = x^2 - y^2, \quad u(x, y) = y \cos y \operatorname{sh} x + x \sin y \operatorname{ch} x, \quad u = r\phi \cos \phi + r \log r \sin \phi$$

5. Выразить оператор Лапласа $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ в терминах производных по z и \bar{z} , а также в полярных координатах.

Новые задачи

1. Разложите в ряд Тэйлора и определите радиус сходимости *Зелёным цветом написаны домашние задания:*
- $\cosh z, \sin z, \cos z$
 - $\log \frac{1+z}{1-z}, \frac{z^2}{(z+1)^2}, \frac{z}{z^2-4z+13}$
 - $\log(1+e^z)$ (Найдите рекуррентное соотношение между коэффициентами). Для этого разложения докажите, что единственный ненулевой член нечетной степени это $z/2$.
2. Определите радиус сходимости

$$\sum_0^{\infty} z^{n!}, \quad \sum_0^{\infty} (\cos in) z^n, \quad \sum_0^{\infty} \frac{n^2}{2^{2^n}} z^n.$$

3. Найдите сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty} nz^n$

4. Посчитайте все возможные значения интеграла

$$\int_{\gamma} \frac{e^z}{z(z^2 - 1)} dz$$

при всех возможных позициях замкнутого контура γ , предполагая, что этот контур не проходит через точки $0, \pm 1$.