

Занятия 7 и 8. Вычисление интегралов продолжается

15.03.22

Старые задачи

1. Вычислите интегралы (внимание, возможно появление полувычетов!)

(a) $\int_{\mathbb{R}} \frac{\sin x - x}{x^3} dx;$

(b) $\text{vp} \int_{\mathbb{R}} \frac{dx}{x - \zeta},$ при $\zeta \in \mathbb{C}.$

2. Посчитайте интегралы (внимание, возможно появление стаканов!)

(a) $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\phi}{5 + 3 \cos \phi};$

(b) $\int_0^{2\pi} \frac{\cos^4 \varphi}{1 + \sin^2 \varphi} d\varphi$

(c) $\text{vp} \int_0^{2\pi} \frac{d\phi}{a + \sin \phi};$

3. Вычислите интегралы (возможно интегрирование вокруг разреза)

(a) $\int_0^{\infty} \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x}};$

(b) $\int_0^{\infty} \frac{dx}{(x+i)\sqrt{x}};$

(c) $\int_0^{\infty} \frac{dx}{(x^2+4)\sqrt[3]{x}};$

(d) $\int_0^{\infty} \frac{\ln x}{(x+1)\sqrt{x}} dx.$

4. Вычислите интегралы (возможно интегрирование по гантели!)

(a) $\int_0^2 \frac{\sqrt{x(2-x)}}{x+3} dx;$

(b) $\int_0^1 \frac{\sqrt{x(1-x)}}{(x+1)^3} dx;$

(c) $\int_0^1 x^\alpha (1-x)^{1-\alpha} dx,$ äää $-1 < \Re \alpha < 2.$

5. Посчитайте число корней функции $f(z) = z^4 - 8z + 10$ в круге $|z| < 1$. А в кольце $1 < |z| < 3$?

6. Найдите число корней полинома $z^6 + z^5 + 6z^4 + 5z^3 + 8z^2 + 4z + 1$ в правой полуплоскости.

7. Существует ли функция f , голоморфная в окрестности нуля и такая что

a) $f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} \cos(n\pi)$;

b) $f\left(\frac{1}{n}\right) = e^{-n}$;

c) $\left|f\left(\frac{1}{n}\right) - \frac{\cos n\pi}{2n+1}\right| < \frac{1}{n^2}$