

Занятие 9. Последние интегралы

15.03.22

Старые задачи

1. Вычислите интегралы (возможно интегрирование по гантели!)

(a) $\int_0^1 \frac{\sqrt{x(1-x)}}{(x+1)^3} dx;$

(b) $\int_0^2 \frac{\sqrt{x(2-x)}}{x+3} dx;$

(c) $\int_0^1 x^\alpha(1-x)^{1-\alpha} dx,$ при $-1 < \Re\alpha < 2.$

2. Существует ли функция f , голоморфная в окрестности нуля и такая что

a) $f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} \cos(n\pi);$

b) $f\left(\frac{1}{n}\right) = e^{-n};$

c) $\left|f\left(\frac{1}{n}\right) - \frac{\cos n\pi}{2n+1}\right| < \frac{1}{n^2}$

Новые задачи

1. Пусть φ — регулярная ветвь функции $\log z$, определенная в области с разрезом $\arg z = \alpha, \alpha \in (0, 2\pi)$, и такая что $\varphi(0) = 1$. Вычислите $\varphi(-1)$ в зависимости от α .

2. Пусть φ — регулярная ветвь функции $\sqrt{(z^2 - 1)(z^2 - 4)}$ в области $\mathbb{C} \setminus ([-2, -1] \cup [1, 2])$, положительная на отрезке $(-1, 1)$. Вычислите значения φ в точках $3, -3, i, -i$.

3. Докажите, что функция $f(z) = \sqrt[8]{\sqrt{z} + \sqrt{z-1}}$ допускает выделение регулярной ветви в области $(\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}) \cup [0, 1]$.