Листочек 11
Математический анализ. 2 курс

Выдан: 25.04.2022. Дедлайн (крайний срок): 25.05.2021.

Базовые задачи

1. [1 балл] Пусть функция f аналитична на всей комплексной плоскости, вещественна на вещественной оси и чисто мнима на мнимой оси. Докажите, что функция f нечётна.

2. [2 балла] Пусть f — целая функция, и для каждого числа $z_0 \in \mathbb{C}$ в разложении

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z_0)(z - z_0)^n$$

найдется такой номер n, что $c_n(z_0) = 0$. Докажите, что функция f — многочлен.

3. [2 балла] Пусть a и b — вещественные числа, а $\alpha \in [0, 576]$. При каких значениях этих параметров выполнено тождество

$$\text{v.p.} \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{|z|^\alpha \, dz}{(z^{239} - a)(z^{239} - b)} = 0?$$

4. [2 балла] Пусть f — аналитическая функция в единичном диске, такая что $\Re f \geq 0$ всюду. Докажите, что $f \in H_p$ при всех $p < 1$.

5. [1 балл] Постройте отображение на верхнюю полуплоскость полосы $\{z\colon |\mathrm{Re} z| < 1\}$, разрезанной вдоль луча $\{z = \frac{1}{3} + iy\colon y \geq 0\}$.

6. [2 балла] Постройте конформное отображение единичного квадрата на его дополнение.

7. [2 балла] Докажите, что существует постоянная C, такая что

$$\left(\sum_{k \geq 1} \frac{|a_k|^2}{k} \right)^{\frac{1}{2}} \leq C \|f\|_{H_1}$$

для всех функций $f = \sum_{k \geq 0} a_k z^k \in H_1(\mathbb{D})$.

8. [2 балла] Пусть $f(z) = z + \sum_{k \geq 2} a_k z^k$ — однолистная функция в единичном диске. Докажите, что $|a_3 - a_2^2| \leq 1$.

9. [1 балл] Каково число решений уравнения $\sin z^{100} = z/11$ в круге $|z| = 1$?

10. [2 балла] Пусть D_1, D_2, D_3 — три круга на комплексной плоскости, причём $\bar{D}_1 \cup \bar{D}_2 \subset D_3$ и $\bar{D}_1 \cap \bar{D}_2 = \varnothing$. При каких условиях на эти круги области $\Omega = D_3 \setminus (\bar{D}_1 \cup \bar{D}_2)$ изоморфны?

Рейтинговые задачи

11. Докажите соотношение

$$\prod_{n=1}^{\infty} \cos \frac{z}{2^n} = \frac{\sin z}{z}$$

12. Найдите все функции $u(x,y)$, гармонические в $\mathbb{R}^2$ и удовлетворяющие всюду в $\mathbb{R}^2$ соотношению $\frac{\partial u}{\partial x} < 0$.

13. Пусть H гильбертово пространство и $A\colon H \to H$ самосопряженный оператор. Обозначим символом $\sigma(A)$ спектр оператора A. Спектральным радиусом оператора A называется величина $\rho(A) = \max\{|\lambda|\colon \lambda \in \sigma(A)\}$. Докажите, что $\rho(A) = \|A\|$. Приведите пример, того, что это не так, если не требовать самосопряженности A.

14. Пусть $(\mathfrak{X}, \Sigma, \mu)$ - пространство с (σ-аддитивной) мерой и $L^p = L^p(\mathfrak{X}, \Sigma, \mu)$. Даны числа $1 \le p_0 < p_1 < \infty$ и $\alpha \in (0,1)$. Положим $p = (1-\alpha)/p_0 + \alpha/p_1$. Докажите, что если T — линейный ограниченный оператор из L^{p_0} в L^{p_0} и из L^{p_1} в L^{p_1}, то T также ограничен из L^p в L^p. При этом

$$\|T\|_{L^p \to L^p} \le \left(\|T\|_{L^{p_0} \to L^{p_0}}\right)^{1-\alpha} \left(\|T\|_{L_1^p \to L_1^p}\right)^{\alpha}$$

(Вы можете считать, что изначально оператор определен на плотном множестве ограниченных финитных функций и продолжается по непрерывности на соответствующее пространство).