Probabilistic techniques in analysis: Reproducing Kernel Hilbert spaces

Program

Time	Friday, 21.10	Saturday, 22.10
11.00-12.00	Malamud	Fedorovskiy
12.00-12.20	Coffee-break	Coffee-break
12.20-13.20	Romanov	Osipov
13.20-15.00	Lunch	Lunch
15.00-15.30	Shemyakov	Kuznetsov
15.40-16.10	—	Batenev
16.10-16.30	Coffee-break	Coffee-break
16.30-17.00	Prokofiev	Khasyanov

Time	Monday, 24.10	Tuesday, 25.10
11.00-12.00	Belov	Peller
12.00-12.20	Coffee-break	Coffee-break
12.20-13.20	Musin	Khabibullin
13.20-15.00	Lunch	Lunch
15.00-15.40	Kalmykov	Mozolyako
15.50-16.30	Kapustin	Lopatin
16.30-16.50	Coffee-break	Coffee-break
16.50-17.30	Lysov	Bochkov

Abstracts

Тимур Батенев (СПбГУ)

Представляющие системы из ядер Коши

В докладе будет описана элементарная конструкция представляющих систем из ядер Коши в пространствах Харди H^p, $1 \le p < \infty$ и $A(\mathbb{D})$, а также представляющих систем из воспроизводящих ядер в некотором классе весовых пространств Харди.

Yurii Belov (Saint-Petersburg State University)

Gabor frames for rational functions

Let g be a function from $L^2(\mathbb{R})$. With every $\alpha, \beta > 0$ we connect the Gabor system $G(g, \alpha, \beta)$ of time-frequency shifts of g,

$$G(g, \alpha, \beta) = \{e^{2\pi i \alpha m x} g(x - \beta n)\}, \quad m, n \in \mathbb{Z}.$$

The main question of Gabor analysis is to describe frame set, i.e. to describe pairs α, β such that the system $G(g, \alpha, \beta)$ generates a frame in $L^2(\mathbb{R})$.
Until recently only a few examples of functions g with complete description of the frame set were known. The answer has been obtained for the Gaussian (Lyubarskii, Seip), truncated and symmetric exponential functions (Jannsen), the hyperbolic secant (Jannsen). Despite numerous efforts little progress has been done until 2011. A breakthrough was achieved by Grochenig, Romero and Stöckler who considered the class of totally positive functions of finite type and, by using another approach, Gaussian totally positive functions of finite type. We managed to find a new class of functions with complete description of frame set – rational functions of Herglotz type. This was done by combination of classical theory of entire functions with some ideas from dynamical systems. We also proved some other results for arbitrary rational functions and some results for non-lattice Gabor systems. The talk is based on joint works with A. Kulikov and Yu. Lyubarskii.

Иван Бочков (СПбГУ)

Нули Дзета-функции Хелсона с конечным числом значений

Дзета-функция Хелсона определяется как

$$\zeta_\chi(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \chi(n) n^{-s}$$

для полностью мультипликативной χ. Естественный вопрос, поставленный К. Сейпом – какое может быть множество нулей и полюсов дзета-функции Хелсона?

Данный доклад призван частично ответить на этот вопрос. В частности, будет доказано, что в полосе $\frac{21}{40} < \Re s < 1$ множество нулей и полюсов может быть любым локально конечным множеством. Более того, для этого достаточно рассматривать функции χ с любым конечным числом значений, большим 2, при этом функция χ может быть построена конструктивно.

Sergei Kalmykov (Shanghai Jiao Tong University, Keldysh Institute of Applied Mathematics, Institute of Applied Mathematics FEB RAS)

On Bernstein- and Markov-type inequalities

Polynomial inequalities have various applications. For example, in approximation theory they are fundamental in establishing converse results, i.e., when one deduces smoothness from a given rate of approximation (see e.g. [1, p. 241]). In this talk we discuss classical Bernstein- and Markov-type inequalities for polynomials and rational functions as well as their recent generalizations. Mainly, we are interested in the results obtained with the help of potential theory and geometric function theory of a complex variable (for details see the surveys [2] and [3]). Key tools of proofs will be also considered.

This is based joint work with V. Dubinin, B. Nagy and V. Totik.

References

[1] Borwein P., Erd?lyi T., *Polynomials and polynomial inequalities.* Graduate Texts in Mathematics, 161. Springer-Verlag, New York, 1995.

[2] Dubinin V. N., “Methods of geometric function theory in classical and modern problems for polynomials.” *Russ. Math. Surv.,* 67 (4): 599–684, 2012.

[3] Kalmykov S., Nagy B., Totik V., “Bernstein- and Markov-type inequalities.” *Surv. Approx. Theory,* 9: 1–17, 2021.

Mark Malamud (RUDN)

Riesz basis property of root vectors system for $n \times n$ Dirac type operators

In this talk we investigate spectral properties of selfadjoint and non-selfadjoint boundary value problems (BVP) for the following first order system of ordinary differential equations

$$Ly = -iB(x)^{-1}\big(y' + Q(x)y\big) = \lambda y, \quad B(x) = B(x)^*, \quad y = \mathrm{col}(y_1, \dots, y_n), \quad x \in [0, \ell],$$

on a finite interval $[0, \ell]$. Here $Q \in L^1([0, \ell]; \mathbb{C}^{n \times n})$ is a potential matrix and $B \in L^\infty([0, \ell]; \mathbb{R}^{n \times n})$ is an invertible self-adjoint diagonal “weight” matrix. If $n = 2m$ and $B(x) = \mathrm{diag}(-I_m, I_m)$ this equation is equivalent to Dirac equation of order n.

Our first main result is the existence of triangular transformation operators for such equation under certain conditions on the entries of $B(x)$. The case of constant

$B(x) = B$ is investigated in [1]. Here we discuss applications of this result to the spectral properties of BVP associated with the above equation subject to BC $U(y) = Cy(0) + Dy(\ell) = 0$, $\operatorname{rank}(C\ D) = n$.

As a first application of this result, we show that the deviation of the characteristic determinants $\Delta(\lambda) - \Delta_0(\lambda)$ of perturbed and unperturbed (with $Q = 0$) BVPs is a Fourier transform of a certain summable function explicitly expressed via kernels of the transformation operators. In turn, this representation leads to the asymptotic formula $\lambda_m = \lambda_m^0 + o(1)$ as $m \to \infty$, for the eigenvalues $\{\lambda_m\}_{m\in\mathbb{Z}}$ and $\{\lambda_m^0\}_{m\in\mathbb{Z}}$ of perturbed and unperturbed ($Q = 0$) *regular* BVPs, respectively. In the case of $n = 2$ and constant matrix $B(x) = B$ both results are obtained in [2].

Further, we prove that the system of root vectors of the above BVP constitutes a Riesz basis in a certain weighted L^2-space, provided that the boundary conditions are *strictly regular*. Along the way, we also establish completeness, uniform minimality and asymptotic behavior of root vectors. The case of constant matrix $B(x) = B$ was investigated in [2], [3].

The main results are applied to establish asymptotic behavior of eigenvalues and eigenvectors, and the Riesz basis property for the dynamic generator of spatially non-homogenous damped Timoshenko beam model. We also found a new case when eigenvalues have an explicit asymptotic, which to the best of our knowledge is new even in the case of constant parameters of the model.

This is a joint work with Anton Lunyov partially published in preprint [4]. The work is supported by a grant of the Government of the Russian Federation for the state support of scientific research, carried out under the supervision of leading scientists, agreement 075-15-2021-602

References

[1] Malamud M. M., "Questions of uniqueness in inverse problems for systems of differential equations on a finite interval." *Trans. Moscow Math. Soc.* 60 : 173–224, 1999.

[2] Lunyov A. A., Malamud M. M., "On the Riesz basis property of root vectors system for 2×2 Dirac type operators." *J. of Math. Anal. and Appl.*, 441,: 57–103, 2016.

[3] Lunyov A. A., Malamud M. M., "On completeness and Riesz basis property of root subspaces of boundary value problems for first order systems, *J. of Spectral Theory*, 5 (1),: 17–70, 2015.

[4] Lunyov A. A., Malamud M. M., "On transformation operators and Riesz basis property of root vectors system for $n\times n$ Dirac type operators." https://arXiv:2112.07248, 2021.

Владимир Капустин (Санкт-Петербургское отделение Математического института им. В. А. Стеклова)

О канонической системе с диагональным гамильтонианом, связанной с дзета-функцией Римана

В работе автора [1] было построено конкретное пространство де Бранжа, содержащее кси-функцию Римана, делённую на многочлен степени 3, и соответствующая этому пространству каноническая система с диагональным гамильтонианом — пара дифференциальных уравнений первого порядка на полуоси. Этот результат позволяет строить операторы — одномерные возмущения дифференциальных операторов, спектр которых совпадает со множеством нетривиальных нулей дзета-функции Римана, развёрнутым на вещественную прямую. При этом не уточнялось, каким образом устроена пара векторов, определяющих возмущение; если один из них легко построить явно, то другой уже непосредственно связан с дзета-функцией. Целью доклада является прояснение вида недостающего вектора.

Основополагающим фактом теории пространств де Бранжа и канонических систем является существование аналога преобразования Фурье — унитарного оператора, действующего из гильбертова пространства канонической системы на пространство де Бранжа. В обсуждаемом случае этот оператор представляется в виде суперпозиции пяти естественных унитарных операторов, среди которых особую роль играют два из них, представляющие собой стандартное преобразование Лапласа и преобразование Меллина, понимаемое особым образом. Грубо говоря, по функции, представляющей собой модификацию кси-функции Римана, с помощью обратного преобразования Меллина строится преобразование Лапласа соответствующего ей элемента пространства канонической системы в терминах тета-функции Якоби.

Список литературы

[1] Капустин В. В., “Множество нулей дзета-функции Римана как точечный спектр оператора.” *Алгебра и анализ,* 33 (4): 107–124, 2021.

Илья Лопатин (Математический институт им. В. А. Стеклова РАН)

О скалярной задаче равновесия для $\mathcal{GN}$-систем

В 2018 году в рамках деятельности по обобщению теории Г. Шталя на полиномы Эрмита–Паде С. П. Суетиным в работе [4] был предложен новый подход к описанию слабой асимптотики полиномов Эрмита–Паде для систем функций марковского типа. Он основан на рассмотрении скалярной теоретико-потенциальной задачи равновесия с внешним гармоническим полем, поставленной на компактной римановой поверхности. В [4] этот метод был проиллюстрирован на примере решения модельной задачи о слабой асимптотике полиномов Эрмита–Паде типа I для обобщённой системы Никишина специального вида $\aleph_0$ из двух функций; в работе [2] он был распространён на минимально более общую $\mathcal{GN}$-систему $\aleph_g$. Основное различие между системами $\aleph_0$ и $\aleph_g$ геометрическое. В обозначениях работы [1] им соответствуют графы $\Gamma_0(\mathcal{V}_0, \mathcal{E}_0, O_0)$ и $\Gamma_g(\mathcal{V}_g, \mathcal{E}_g, O_g)$ соответственно; при этом $\mathcal{V}_0 = \mathcal{V}_g = \{\mathtt{0}, \mathtt{1}, \mathtt{2}\}$, $O_0 = O_g = \mathtt{0}$, но для Γ_0 множество $(\mathtt{0}, \mathtt{1})$ состоит из одного элемента, а для Γ_g – из $g + 1$ элемента. Предельная мера соответствующих полиномов Эрмита–Паде в [2] описана в терминах скалярной теоретико-потенциальной задачи равновесия на гиперэллиптической римановой поверхности рода g с внешним гармоническим полем

$\log|\Phi(\mathbf{z})|$ относительно ядра

$$g_\circ(\mathbf{z}, \infty^{(1)}, \mathbf{t}) - \log|z - t|,$$

где $g_\circ$ – $\circ$-нормированная биполярная функция Грина [5], $\mathbf{z}$ – точка на поверхности, $z = \pi(\mathbf{z})$ – её образ при каноническом проектировании на риманову сферу, $\Phi(\mathbf{z})$ – функция, конформно отображающая рассматриваемую риманову поверхность на риманову сферу. В случае $g = 0$ система $\aleph_g$ переходит в $\aleph_0$, а вышеописанное ядро и внешнее поле – в таковые из работы [4].

В [3] для было показано, что для системы $\aleph_0$ рассматриваемая скалярная задача равновесия на римановой поверхности эквавлентна векторной теоретико-потенциальной задаче равновесия на плоскости [1], в терминах которой традиционно и описывается слабая асимптотика полиномов Эрмита–Паде. В докладе пойдёт речь о доказательстве аналогичного результата для $\aleph_g$,

Исследование выполнено за счёт гранта Российского научного фонда https://rscf.ru/project/19-11-00316/ № 19-11-00316.

Список литературы

[1] Аптекарев А. И., Лысов В. Г., “Системы марковских функций, генерируемые графами, и асимптотика их аппроксимаций Эрмита–Паде.” *Матем. сб.,* 201 (2): 29–78, 2010.

[2] Лопатин И. А., “Об обобщении нового подхода к описанию слабой асимптотики полиномов Эрмита-Паде для системы Никишина.” *Матем. сб.,* в печати, 2021.

[3] Суетин С. П., “О новом подходе к задаче о распределении нулей полиномов Эрмита–Паде для системы Никишина.” *Комплексный анализ, математическая физика и приложения,* Сборник статей, Тр. МИАН, 301 : 259–275, МАИК «Наука/Интерпериодика», М., 2018.

[4] Суетин С. П., “Об эквивалентности скалярной и векторной задач равновесия для пары функций, образующей систему Никишина.” *Матем. заметки,* 106 (6): 904–916, 2019.

[5] Чирка Е. М., “Потенциалы на компактной римановой поверхности.” *Комплексный анализ, математическая физика и приложения,* Сборник статей, Тр. МИАН, 301 :287–319, МАИК «Наука/Интерпериодика», М., 2018.

Владимир Лысов (Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН)

Векторные равновесные меры и распределения нулей многочленов совместной ортогональности дискретной переменной

Многочлены, ортогональные относительно дискретных мер, имеют многочисленные приложения [1,2]. Первые результаты [3,4] о предельном распределении нулей таких многочленов связаны с задачами равновесия логарифмического потенциала с констрейном и внешним полем. В тоже время известно, что векторные задачи равновесия отвечают [5] за распределение нулей многочленов совместной ортогональности относительно непрерывных весов.

Мы покажем, что распределение нулей совместно ортогональных многочленов дискретной переменной описывается широким классом векторных равновесных мер в задачах с констрейном и внешним полем. Расскажем о новых любопытных эффектах, связанных с выметанием мер в комплексную плоскость, см. [6]. В качестве примера подробно обсудим пример совместно-ортогональных многочленов Кравчука [7], который мотивировал данное исследование.

Исследование выполнено при поддержке Московского центра фундаментальной и прикладной математики, соглашение 075-15-2022-283 с Минобрнауки РФ.

Список литературы Список литературы

[1] Никифоров А.Ф., Суслов С.К., Уваров В.Б., *Классические ортогональные полиномы дискретной переменной* . М.: Наука, 1985.

[2] Baik J., Kriecherbauer T., McLaughlin K. D. T-R, Miller P. D., *Discrete Orthogonal Polynomials. Asymptotics and Applications.* . Princeton University Press, 2007.

[3] Рахманов Е. А., “Равновесная мера и распределение нулей экстремальных многочленов дискретной переменной.” *Матем. сб.* 187 (8): 109–124, 1996.

[4] Dragnev P. D., Saff E.B., “Constrained energy problems with applications to orthogonal polynomials of a discrete variable.” *Journal d'Analyse Mathematique,* 72 (1): 223–259, 1997.

[5] Гончар А. А., Рахманов Е. А., “О сходимости совместных аппроксимаций Паде для систем функций марковского типа.” *Тр. МИАН,* 157 :31–48, 1981.

[6] Сорокин В. Н., “О многочленах совместной ортогональности для дискретных мер Мейкснера.” *Матем. сб.,* 201(10) :137–160, 2010.

[7] Dyachenko A., Lysov V., “Discrete multiple orthogonal polynomials on shifted lattices.” arXiv:1908.11467, 2019.

Il'dar Musin (Institute of Mathematics with Computer Centre of Ufa Scientific Centre of RAS)

Fourier transforms of rapidly decreasing functions

New spaces of rapidly decreasing infinitely differentiable functions on $\mathbb{R}^n$ will be defined in the talk. They are introduced with a help of a family of separately radial convex functions on $\mathbb{R}^n$ satisfying some technical conditions and very similar in construction to Gelfand–Shilov spaces S_α [1]. For all of them Paley–Wiener type theorems are obtained. Using some recent facts of convex analysis it will be shown that the Gelfand–Shilov space W_M [1] is a particular case of one of these spaces.

References

[1] Gelfand I. M., Shilov G. E., *Generalized functions*, Vol. 2, Academic Press, New York, 1968.

Pavel Mozolyako (Saint-Petersburg State University)

Weighted Hardy embedding on the bi-tree

Let Γ be a poly-tree, i.e. a collection of dyadic rectangles on $\mathbb{R}^n$ (Cartesian product of usual dyadic intervals on $\mathbb{R}$) with natural order by inclusion.
The Hardy operator and its 'adjoint' are

$$\mathbf{I}f(R) := \sum_{R\subset Q} f(Q)$$
$$\mathbf{I}^*f(Q) := \sum_{R\subset Q} f(R).$$

We are investigating the action of this operator from $L^2(\Gamma, w^{-1})$ to $L^2(\Gamma,\mu)$, or, which is the same, $\mathbf{I}^*$ from $L^2(\Gamma,\mu^{-1})$ to $L^2(\Gamma, w)$, where w and μ are just collections of non-negative weights attached to the elements of Γ. If for given μ, w the Hardy operator is bounded, we call (μ, w) *the trace measure-weight pair.*

In this talk we consider a special case – the dimension n is either 2 or 3 and the weight w is a product weight (a typical case is just $w \equiv 1$). We give a couple of descriptions of such pairs in potential theoretical terms: capacitary and energy conditions. We give a short exposition of two-dimensional results, and discuss problems that arise with increasing the dimension. We also establish a connection to weighted Dirichlet spaces on the polydisc.

Nikolay Osipov (PDMI)

Interpretable collective intelligence of non-rational human agents

We outline how to create a mechanism that provides an optimal way to elicit, from an arbitrary group of experts, the probability of the truth of an arbitrary logical proposition together with collective information that has an explicit form and interprets this probability. Namely, we provide strong arguments for the possibility of the development of a self-resolving prediction market with play money that incentivizes direct information exchange between experts. Such a system could, in particular, motivate experts from all over the world to collectively solve scientific or medical problems in a very efficient manner. In our main considerations about real experts, they are not assumed to be Bayesian and their behavior is described by utilities that satisfy the von Neumann–Morgenstern axioms only locally.

Roman Romanov (Saint-Petersburg State University)

Determinantal processes and division invariant spaces

We explore the link between determinantal point processes and Hilbert spaces of functions invariant with respect to division. The class of spaces under consideration extends the classical de Branges spaces of entire functions. The spaces correspoding to determinantal processes are shown to have integrable reproducing kernel. Analytic properties of the elements of these spaces are investigated.

The talk is based on a joint work with Alexander Bufetov. The work is supported by RFBR (Russian Foundation for Basic Research, grant No 20-51-14001).

[1] A. Bufetov and R. Romanov, "Division subspaces and integrable kernels", *Bull. London Math. Soc.,* **51**, 267–277, 2019.

Roman Romanov (Saint-Petersburg State University)

Determinantal processes and division invariant spaces

We explore the link between determinantal point processes and Hilbert spaces of functions invariant with respect to division. The class of spaces under consideration extends the classical de Branges spaces of entire functions. The spaces correspoding to determinantal processes are shown to have integrable reproducing kernel. Analytic properties of the elements of these spaces are investigated.

The talk is based on a joint work with Alexander Bufetov. The work is supported by RFBR (Russian Foundation for Basic Research, grant No 20-51-14001).

[1] A. Bufetov and R. Romanov, "Division subspaces and integrable kernels", *Bull. London Math. Soc.,* **51**, 267–277, 2019.

Б.Н. Хабибуллин (БГУ)

Полнота экспоненциальных систем в пространствах голоморфных функций и теорема Хелли о пересечениях выпуклых множеств

Система функций из топологического векторного пространства H *полна*, если замыкание ее линейной оболочки совпадает с H. На компактах C в *комплексной плоскости* $\mathbb{C}$ рассматриваем в качестве модельного банаховы пространства функций $f : C \to \mathbb{C}$, непрерывных на C и одновременно голоморфных во внутренности C, со стандартной нормой

$$\|f\| := \sup\{|f(z)| | z \in C\},$$

которое содержит любые *экспоненциальные системы*

$$\mathrm{Exp}^Z := \{w \mapsto e^{zw},\ w \in \mathbb{C} | z \in Z\},$$

где Z – не более чем счетное попарно различных точек-*показателей* на $\mathbb{C}$. Обзор по полноте таких систем можно найти в [1].

Мотивировка рассматриваемых геометрических вопросов – исследование условий, при которых система Exp^Z с показателями Z, являбщимися нулями некоторой суммы (конечного или бесконечного) семейства целых функций экспоненциального типа, полна или нет в указанных выше пространствах функций. Когда C – выпуклый компакт, эта задача оказалась тесно связанной с теоремой Хелли о пересечении выпуклых множеств в следующей трактовке [2], [3].

Пусть C и S – два множества в конечномерном евклидовом пространстве над *полем вещественных чисел* $\mathbb{R}$, заданные соответственно как пересечения и как объединения некоторых подмножеств этого пространства. Даются критерии, при которых некоторый параллельный перенос, т.е. сдвиг, множества C полностью покрывает (соответственно содержит, соответственно пересекает) множество S. Эти критерии и подобные им формулируются в терминах геометрических, алгебраических и теоретико-множественных разностей подмножетсв, порождающих C и S, опорных функций множеств C и S, а также смешанных площадей выпуклых множеств в $\mathbb{C}$ или объемов в $\mathbb{R}^n$, $n = 1, 2, 3, \ldots$. Отдельно обсуждается двумерный специфический случай, когда множества неограничены, для чего используются дополнительные характеристики множеств.

Полученные в [3], [4], [5] на основе этих геометрических рассмотрений результаты по полноте систем Exp^Z или соответствующие эквивалентные им теоремы единственности для целых функций экспоненциального типа будут дополнены недавними новыми.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда 22-21-00026.

Список литературы

[1] Хабибуллин Б.Н., *Полнота систем экспонент и множества единственности*, РИЦ БашГУ, Уфа, doi:10.13140/2.1.4572.7525, 2012.
[2] Хабибуллин Б.Н., 'Теорема Хелли и сдвиги множеств. I.', *Уфимский матем. журн.*, 6(3):98-111, 2014.
[3] Хабибуллин Б.Н., "Теорема Хелли и сдвиги множеств. II. Опорная функция, системы экспонент, целые функции",[4] Хабибуллин Б.Н., "Последовательности неединственности для весовых пространств голоморфных функций", *Изв. вузов матем.*, 4:75-84, 2015. [5] Хабибуллин Б.Н., Хабибуллин Ф.Б., "О множествах неединственности для пространств голоморфных функций" *Вестник ВолГУ. Сер. 1. Мат. Физ.*, 4(35):108-115, 2016.

Ramis Khasyanov (Saint-Petersburg State University)

The Bohr radius problem for the derivatives of analytic functions

Let X, Y be Banach spaces of analytic functions in the disc $\mathbb{D} = \{|z| \leq 1\}$. Let $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$. We need to find the maximum R for which

$$\|f\|_X \leq 1 \Longrightarrow \| \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|(Rz)^n \|_Y \leq 1.$$

We will call such R the Bohr radius from X to Y and denote $R_{X \to Y}$. If X and Y coincide, just write R_X. The classical Bohr theorem [1] states that $R_{H^\infty} = 1/3$. In this talk we will discuss the recent results related to this task. Let us consider the problem of finding the Bohr radius of the weighted Bloch spaces.

Theorem 1. Let $B(\omega)$ be weighed Bloch space. Then $R_{B(\omega)} \geq \dfrac{1}{\sqrt{2}}$. Moreover the inequality $\Big|\Big| \sum_{n\geq 0} |a_n| \Big(\dfrac{z}{\sqrt{2}}\Big)^n \Big|\Big|_{B(\omega)} \leq ||f||_{B(\omega)}$ is sharp if and only if there exists $r_0 \in \Big[\dfrac{1}{\sqrt{2}}, 1\Big]$, such that for all $r \in [0, 1)$ the inequality $\dfrac{\omega(r)}{\omega(r_0)} \leq \min\Big(2 - \dfrac{r}{r_0}; \dfrac{\sqrt{2}r_0 + r}{\sqrt{2}r + r_0}\Big)$ holds.

Next we consider the Bohr radius problem in the space of analytic functions $H^\infty_{(1)} := \Big\{f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n,\ z \in \mathbb{D} :\ \|f\|_{H^\infty_{(1)}} := |a_0| + \sup_{z\in\mathbb{D}} |f'(z)| < \infty\Big\}$. Bappaditya Bhowmik and Nilanjan Das showed [2] that $R_{H^\infty \to H^\infty_{(1)}} = 1 - \sqrt{2/3} = 0.183503....$ We obtained lower and upper estimates for $R_{H^\infty_{(1)} \to H^\infty}$. We also apply our results to the inequalities for subordinate functions.

Theorem 2. $0.872664... \leq R_{H^\infty_{(1)} \to H^\infty} \leq \left(1 + \frac{1}{2} W\left(\frac{-2}{e^2}\right)\right)^{1/2} = 0.892643...$, where $W(x)$ is Lambert function: $x = W(x)e^{W(x)}$.

R E F E R E N C E S

1. Bohr H. *A theorem concerning power series.* Proceedings of the London Mathematical Society. 1914.

2. Bappaditya Bhowmik. Nilanjan Das. «On some aspects of the Bohr inequality.» Rocky Mountain J. Math. 51 (1) 87 - 96, February 2021.

Владимир Шемяков (СПбГУ)

Распределение нулей сумм ядер Коши

Работа посвящена вопросам распределении нулей сумм ядер Коши и их производной. Сформулированы примеры, гипотезы и результаты о распределении нулей других исследователей, уточнено распределение нулей при более сильном ограничении, по сравнению с теоремой K.Langley и J.Rossi.