Uncertainty and random structures: Signal Analysis, Representation Theory and Applications

Abstracts

А.Р. Алимов

Монотонная связность множеств в банаховых пространствах и локальные свойства единичной сферы

Известная теорема А. Л. Брауна утверждает, что в конечномерном (BM)-пространстве любое солнце связно по Менгеру, что, с учетом одного результата автора настоящей работы, влечет его монотонную линейную связность. В теории приближений хороши известна характеризация пространств размерности 3 или 4, в которых любое чебышёвское множество выпукло. Таким критериальным свойством оказывается требование гладкости каждой достижимой точки единичной сферы. Оказывается, что для заданного множества M его выпуклость достаточно установить, проверяя на гладкость не все достижимые точки сферы, а лишь M-действующие точки сферы, т.е. те точки, “аналогами” которых (при растяжении и сдвиге единичного шара) можно коснуться множества M. В настоящей работе аналогичная теорема устанавливается для монотонно линейно связных множеств. Именно, показывается, что подмножество M конечномерного нормированного пространства монотонно линейно связно, если любая M-действующая точка единичной сферы является (BM)-точкой. Полученный результат применяется также для исследования (BM)-точек конкретных и абстрактных пространств. Также дается характеризация трехмерных полиэдральных пространств, в которых любое солнце монотонно линейно связно.

А.О. Багапш

Метод возмущений для кососимметрической эллиптической системы

Обсуждается вопрос о разрешимости задачи Дирихле для сильно эллиптической системы второго порядка с постоянными коэффициентами в жордановой области на плоскости. Такая система может быть записана в виде одного уравнения

$$af_{xx} + 2bf_{xy} + cf_{yy} = 0 \tag{1}$$

относительно комплекснозначной функции f с комплексными коэффициентами a, b, c такими, что корни λ_1 и λ_2 уравнения $a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$ невещественны и лежат в разных полуплоскостях относительно вещественной прямой. С помощью аффинного преобразования плоскости рассматриваемое уравнение приводится к каноническому виду

$$\partial\overline{\partial} f + \tau \partial^2 f = 0 \tag{2}$$

с операторами Коши — Римана ∂, $\overline{\partial}$ и параметром $\tau \in [0, 1)$.

Хотя известны результаты о разрешимости задачи Дирихле в классической постановке для областей с гладкими границами, однако только в случае уравнения Лапласа, отвечающего значению $\tau = 0$, установлена общая разрешимость задачи в произвольной односвязной области — это теорема Лебега 1907 г.

В докладе рассматривается метод возмущения, состоящий в поиске решения в виде ряда

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} f_n \tau^n,$$

где функции f_n удовлетворяют уравнениям

$$\partial\overline{\partial} f_0 = 0, \qquad \partial\overline{\partial} f_n = -\partial^2 f_{n-1}, \quad n \geqslant 1,$$

в заданной области, а граничные условия распределяются по этим функциям. Приводится схема доказательства сходимости метода в случае областей с достаточно гладкими границами при достаточно регулярных граничных данных. Кроме того, для некоторых областей даются интегральные представления типа Пуассона для решений кососимметрических систем.

В.Ю. Березнюк

Коммутаторная длина степеней в свободных произведениях групп

Давно известно, что в свободной группе неединичный коммутатор не может быть истинной степенью. В 1981 году Каллером было показано, что произведение двух коммутаторов может быть третьей нетривиальной степенью. Более того, было показано, что существуют n-ые нетривиальные степени, которые раскладываются в произведение $[n/2]+1$ коммутатора. В 1991 Данканом и Хауи было показано, что данная оценка является точной: в свободном произведении локально индикабельных групп (а значит и в свободной группе) никакая нетривиальная n-ая степень не может быть разложена в произведение меньше, чем $[n/2]+1$ коммутатора. В 2018 году Ивановым и Клячко, и независимо от них Ченом, было показано, что та же самая оценка остается верной и для свободного произведения произвольных групп без кручения.

В докладе будет дана аналогичная оценка для случая свободного произведения произвольных групп. Оказывается, что в данном случае минимальная возможная коммутаторная длина нетривиальной n-ой степени равняется $[n/2]-[n/N]+1$, где N — это минимальный возможный порядок (быть может бесконечный) неединичного элемента группы G. Более того, оказывается, что этот минимум достигается на степенях коммутатора $[a,t]$, где порядок элемента a равен N.

Доклад основан на совместных результатах с А. А. Клячко.

А.Б. Богатырев

Чебышевский анзац для задачи о многополосном фильтре

При проектировании радиоэлектронных устройств возникает задача о наилучшей рациональной аппроксимации двузначной индикаторной функции на системе отрезков (полосы пропускания и задержки электрического фильтра). Будет рассказано об опыте использования чебышевской конструкции в этой задаче для существенного понижения ее размерности.

А.А. Вагаршакян

Теоремы единственности в анализе

Многие теоремы анализа могут рассматриваться как теоремы единственности, будь то теорема Шеннона-Котельникова в цифровой обработке сигналов, теорема Кантора о тригонометрических рядах, теорема братьев Рисс в теории меры или теорема Карлсона в комплексном анализе. В докладе будут исследованы соотношения между этими теоремами.

Л.В. Гензе, С. П. Гулько, В.Р. Лазарев, Т. Е. Хмылёва

Классификация пространств непрерывных функций, пространств бэровских функций и свободных периодических топологических групп

В докладе будет представлен обзор результатов, касающихся линейной, равномерной и топологической классификации пространств $C(X,Y)$ непрерывных функций и пространств $B(X,Y)$ бэровских функций, заданных на отрезках ординалов и некоторых других пространствах. Сами функции принимают либо вещественные значения, либо значения в группе $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, а пространства функций рассматриваются с топологией поточечной сходимости.

Помимо классификации пространств функций в докладе также будет представлена классификация свободных периодических топологических групп отрезков ординалов.

Большинство представленных результатов были получены в период с 1975 года по настоящее время сотрудниками кафедры теории функций Томского государственного университета.

Andrey Domrin

Tau functions and their growth

Abstract: The Szegö–Widom constant occurring in the asymptotic formula for truncated block Toeplitz determinants is a remarkable smooth function on the loop group of the complete linear group, with many applications to orthogonal polynomials and random matrix theory. In terms of the Riemann–Hilbert problem on the circle, this function was recently recognized as the tau function of solutions of soliton equations in the Segal–Wilson class. We extend the Toeplitz and Riemann–Hilbert set-up to cover all local holomorphic solutions. In particular, we prove that every local holomorphic (in x and t) solution of the Korteweg–de Vries equation is the second logarithmic derivative of an entire function of the spatial variable x and discuss the possible order of growth of this entire function along with similar results and conjectures for other soliton equations.

Mikhail Dubashinskiy

Growth and divisor of complexified horocycle eigenfunctions

In hyperbolic Lobachevsky plane $\mathbb{H}$ implemented as $\mathbb{C}^+$, consider functions $u\colon \mathbb{H} \to \mathbb{C}$ satisfying

$$\left(-y^2\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)+2i\tau y\frac{\partial}{\partial x}\right)u(x+iy)=s^2u(x+iy),\quad x+iy\in\mathbb{C}^+,$$

with τ large, s/τ small. These are eigenfunctions of quantum magnetic Hamiltonian. By Bohr semiclassical correspondence principle, their high-frequency behavior is governed by *horocycle* flow over $\mathbb{H}$. By Furstenberg Theorem on unique ergodicity of the latter flow, we have a plenty of such functions possessing Quantum Unique Ergodicity (QUE) at the admissible energy level of classical Hamiltonian.

Also, horocycle eigenfunctions can be analytically continued to complexification of $\mathbb{H}$ which is just $\mathbb{C}\times\mathbb{C}$. Under QUE assumption, we study growth of these functions in the semiclassical limit and derive a corollary on asymptotics of their divisors.

А.В. Дьяченко

Класс Лагерра-Пойа, теорема Эрмита-Билера и вполне неотрицательные матрицы

Класс Лагерра-Пойа LP^+ состоит из целых функций, которые являются (равномерными на компактах) пределами многочленов с отрицательными нулями. Простоты ради будем нормировать эти функции так, чтобы они были неотрицательны в нуле. Один из замечательных способов характеризовать класс LP^+ даёт теорема Эйсена–Эдрея–Уитни–Шёнберга, утверждающая, что тёплицева матрица тейлоровских коэффициентов таких (и только таких целых) функций вполне неотрицательна (т.е. все её миноры неотрицательны). Другая замечательная теорема (Эрмита–Билера) позволяет связать класс LP^+ с устойчивостью по Гурвицу многочленов и целых функций, дополнительно вводя в рассмотрение проблему моментов Стилтьеса.

В докладе будут представлен ряд результатов на эту тему: новые и старые критерии для принадлежности классу LP^+, описание функций, порождающих вполне неотрицательные матрицы Гурвица (в т.ч. обобщённые), а также несколько занимательных примеров.

И.Р. Каюмов

К неравенствам типа Долженко в случае областей с фрактальными границами

В ходе доклада будет дан обзор результатов, полученных совместно с А.Д. Барановым, по неравенствам типа Долженко для областей с фрактальными границами. Будут продемонстрированы новые неравенства в терминах размерности Минковского. Особое внимание будет уделено случаю $p < 1$, где неспрямляемость границы области играет существенную роль.

И.А. Колесников

Конформный модуль четырехугольника

Пусть $Q = Q(A_1A_2A_3A_4)$ — четырехугольник с углами $\delta\pi$, $\alpha\pi$, $\beta\pi$ и $\gamma\pi$ при вершинах A_1, A_2, A_3 и A_4 соответственно. Через M обозначим конформный модуль четырехугольника Q. Тогда $M = \dfrac{K\big(\sqrt{r}\big)}{2K\big(\sqrt{1-r^2}\big)}$, где r является решением дифференциального уравнения

$$2t^2r^2(t)r'(t)r'''(t) - 3t^2r^2(t)r''^2(t) + (\gamma+\delta)(\gamma+\delta-2)r'^2(t)\big(r^2(t) - t^2r'^2(t)\big) +$$
$$+ t^2r'^4(t)\frac{4(\alpha-\beta)(\gamma-\delta)r(t)(1+r^2(t)) - 4\big((\alpha-\beta)^2+(\gamma-\delta)^2-1\big)r^2(t)}{\big(1-r^2(t)\big)^2} = 0,$$

при $t = 1$ с начальным условием

$$r'(0) = \frac{1}{4}\left(\frac{|A_1A_4|}{|A_2A_3|}\frac{\sin(\gamma+\delta-1)\pi}{\sin\beta\pi}\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma+\delta)\Gamma(\gamma+\delta-1)}{\Gamma(\gamma)\Gamma(\delta)\Gamma(1-\beta)}\right)^{\frac{1}{\gamma+\delta-1}},$$

$$r''(0) = 2r'^2(0)\frac{(\alpha-\beta)(\gamma-\delta)}{(\gamma+\delta)(\gamma+\delta-2)}, \quad r(0) = 0,$$

где Γ — гамма функция, K — полный эллиптический интеграл первого рода. Функция $r = r(t)$ аналитична относительно переменной t.

Результат получен с помощью работы [1].

Литература

1. Kolesnikov I. A. *A one-parametric method for determining parameters in the Schwarz–Christoffel integral.* Siberian Math. J. 2021, Vol. 62, No. 4, pp. 638–653.

А.С. Кузнецов

Полнота биортогональных систем для нескольких интервалов

Согласно теореме Юнга, для любой полной минимальной экспоненциальной системы на отрезке (в пространстве квадратично-суммируемых функций) биортогональная система также полна. Нам удалось обобщить этот результат на случай двух и трех отрезков. Как и в случае одного отрезка, мы (с помощью преобразования Фурье) переформулируем задачу в терминах полноты системы воспроизводящих ядер в пространстве Пэли-Винера и приведем описание биортогональных элементов в этом пространстве. Доклад основан на совместных результатах с А.Д. Барановым и Ю.С. Беловым.

Aleksei Kulikov

Fourier uniqueness and non-uniqueness pairs

Given discrete sets $\Lambda, M \subset \mathbb{R}$ we call them a Fourier uniqueness pair if there does not exist a non-trivial Schwartz function f such that f is zero on Λ and $\hat{f}$ is zero on M. In their breakthrough paper, Radchenko and Viazovska constructed first such example with $\Lambda = M = \{\pm\sqrt{n}\}_{n\in\mathbb{N}_0} \cup \{p\}$ for some $p \neq \pm\sqrt{n}$ and moreover provided a way to reconstruct a function from the values of it and its Fourier transform on this set. Later, Ramos and Sousa explored more general Fourier uniqueness sets and they showed, in particular, that if $\gamma < 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$ then $\Lambda = M = \{\pm n^\gamma\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ is a uniqueness pair.

Motivated by these results, we studied necessary and sufficient conditions for a pair of sets to be a Fourier uniqueness pair. We showed that if $\Lambda = M = \{\pm a\sqrt{n}\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ then (Λ, M) is a uniqueness pair if $a < 1$ and a non-uniqueness pair if $a > 1$, and more generally we classified all polynomial uniqueness and non-uniqueness pairs up to the endpoint. Moreover, in the uniqueness case the result can be improved to the frame bound and consequentially the interpolation formula of the form

$$f(x) = \sum_{\lambda\in\Lambda} a_\lambda(x) f(\lambda) + \sum_{\mu\in M} b_\mu(x)\hat{f}(\mu),$$

thus extending the result of Radchenko and Viazovska. This in turn can be used to construct an abundance of new crystalline measures.

The talk is based on a joint work with Fedor Nazarov and Mikhail Sodin.

Sergey Lando

Weight systems related to Lie algebras

V. A. Vassiliev's theory of finite type knot invariants allows one to associate to such an invariant a function on chord diagrams, which are simple combinatorial objects, consisting of an oriented circle and a tuple of chords with pairwise distinct ends in it. Such functions are called "weight systems". According to a Kontsevich theorem, such a correspondence is essentially one-to-one: each weight system determines certain knot invariant.

In particular, a weight system can be associated to any semi-simple Lie algebra. However, already in the simplest nontrivial case, the one for the Lie algebra sl(2), computation of the values of the corresponding weight system is a computationally complicated task. This weight system is of great importance, however, since it corresponds to a famous knot invariant known as the colored Jones polynomial.

The last year was a period of significant progress in understanding and computing Lie algebra weight systems, both for sl(2)- and gl(N)-weight system, for arbitrary N. New recurrence relations were deduced, which allow for a lot of explicit formulas. These methods are based on an idea, due to M. Kazarian, which suggests to extend the gl(N)-weight system to permutations.

Questions concerning possible integrability properties of the Lie algebra weight systems will be formulated.

The talk is based on work of M. Kazarian, the speaker, and the students P. Zakorko, Zhuoke Yang, and P. Zinova.

В.Г. Лысов

Многоуровневые аппроксимации Эрмита–Паде

Доклад посвящен многоуровневой интерполяционной задаче Эрмита–Паде для системы Никишина марковских функций. Мы обсудим важное свойство *совершенности* системы Никишина для этой задачи. Подобно ортогональным многочленам, решения этой интерполяционной задачи обладают рядом замечательных алгебраических и асимптотических свойств. Они удовлетворяют рекуррентным соотношениям до ближайшего соседа и свойству перемежаемости корней. Они также определяют совместные рациональные аппроксимации для системы марковских функций. Методом векторного равновесного потенциала мы докажем сходимость лучевых последовательностей этих аппроксимаций, а также дадим оценки скорости сходимости. Мы кратко обсудим известные приложения этих аппроксимаций в интегрируемых системах (уравнение Дегаспериса–Прочези), случайных матрицах (двухматричная модель) и теории операторов (матрицы Якоби на деревьях).

И.Х. Мусин

Конструктивное описание некоторых классов периодических ультрадифференцируемых функций

В докладе будут рассмотрены проективные и индуктивные пределы нормированных пространств периодических бесконечно дифференцируемых функций в $\mathbb{R}^n$ с заданными оценками на частные производные. Будет дано их описание в терминах коэффициентов Фурье и наилучших тригонометрических приближений. Конкретные примеры таких пространств будут приведены. Особое внимание будет уделено случаю $n = 1$. Также будут рассмотрены некоторые другие проблемы, мотивированные исследованиями П.Л. Ульянова [1].

Список литературы

[1] P.L. Ul'yanov, "On classes of infinitely differentiable functions", Sb. Math., 70:1 (1991), 11–30.

Open Problem Session

Эта сессия посвящена обсуждению открытых задач и областей исследований, а также представлению коротких докладов.
Участники: П.А. Мозоляко, Ю.С. Белов, А.Д. Мкртчян, И.А. Лопатин, П.В. Беляков, И.С. Харченков, И. Лимар, Т. Яворук.

Н.Н. Осипов

Interpretable collective intelligence of non-rational human agents

We outline how to create a mechanism that provides an optimal way to elicit, from an arbitrary group of experts, the probability of the truth of an arbitrary logical proposition together with collective information that has an explicit form and interprets this probability. Namely, we provide arguments for the possibility of the development of a self-resolving prediction market with play money that incentivizes direct information exchange between experts. Such a system could, in particular, motivate experts from all over the world to collectively solve scientific or medical problems in a very efficient manner. In our main considerations about real experts, they are not assumed to be Bayesian and their behavior is described by utilities that satisfy the von Neumann–Morgenstern axioms only locally.

В.В. Пеллер

Матричные треугольные проекторы в S_p при $p < 1$. Что происходит, когда p приближается к 1?

В докладе будут представлены результаты совместной работы с А.Б. Александровым. В недавней нашей работе было показано, что при $0 < p < 1$ норма треугольного проектора в классе Шаттена - фон Неймана S_p на пространстве матриц размера nxn при фиксированном показателе p растёт как $n^{1/p-1}$. С другой стороны, хорошо известно, что при $p=1$ нормы таких проекторов растут логарифмически.

В докладе будет рассказано, как можно получить оптимальные оценки норм таких проекторов равномерно по p и n. Это позволяет нам получить логарифмический рост при $p=1$ как предельный случай оценок в S_p, когда число p стремится к 1.

С. С. Перелевский, Е. А.Пчелинцев

Минимаксное оценивание в диффузионных моделях по неполным данным

Пусть наблюдаемый процесс $(y_t)_{t\geq 0}$ определен на вероятностном пространстве $(\Omega,\mathcal{F},\mathbf{P})$ следующим стохастическим дифференциальным уравнением вида:

$$dy_t = S(y_t)\,dt + \sigma(y_t)dw_t\,, \quad 0\leq t\leq T\,, \tag{1}$$

где $(w_t)_{t\geq 0}$ - скалярный стандартный винеровский процесс, начальное значение y_0 - некоторая заданная константа, $S(\cdot)$ - неизвестный сигнал, $\sigma(\cdot)$ - неизвестный стохастический коэффициент волатильности. Задача - построить минимаксную процедуру выбора модели для оценивания сигнала S по наблюдениям $(y_{t_j})_{0\leq j\leq N}$, $t_j=j/\delta_T$, $N=[T/\delta_T]$ – размер выборки, а параметр $\delta_T\in(0,1)$ - некоторая функция от T. Минимаксность процедуры оценивания устанавливается за счет того, что предлагается оценка, которая имеет более высокую среднеквадратическую точность по сравнению с оценками наименьших квадратов (МНК) для любого конечного объема наблюдений.

Качество оценивания сигнала S на отрезке $[a,b]$ измеряется среднеквадратическим риском

$$R_\vartheta(\widehat{S}_T,S)\;=\;E_\vartheta\|\widehat{S}_T-S\|^2\,,\quad \|S\|^2=\int_a^b S^2(t)dt\,, \tag{2}$$

где $\widehat{S}$ - некоторая оценка (измеримая функция от наблюдений), E_ϑ - математическое ожидание относительно распределения наблюдений $(y_{t_i})_{1\leqslant j\leqslant N}$ при фиксированных функциях S и σ. При этом $\vartheta=(S,\sigma)\in\Theta$, где Θ - функциональное семейство допустимых коэффициентов.

Для неасимптотического оценивания неизвестного сигнала S применим последовательный подход из [2]. Используя метод усеченного последовательного оценивания, строится последовательный план $(\tilde{S}_k,\tau_k)$, с помощью которого переходим от модели (1) к ее аппроксимации регрессионной моделью на сетке $z_k=a+k(b-a)/n$, $k=\overline{1,n}$ на $[a,b]$, $n=[\sqrt{T}(b-a)/4]-1$. Затем для оценивания сигнала S пользуемся дискретным разложением Фурье по базису $(\phi_j)_{j\geqslant 1}$ в пространстве $L_2[a,b]$: $S(z_k)=\sum_{j=1}^n\theta_j\phi_j(z_k)$, где $\theta_j=\dfrac{b-a}{n}\sum_{k=1}^n S(z_k)\phi_j(z_k)$ – неизвестные коэффициенты Фурье, для оценивания которых вместо классических оценок МНК предлагаются следующие сжимающие оценки $\theta^*_{j,n}$, определенные в [1]. Окончательно определяем класс взвешенных сжимающих оценок сигнала S для всех $a \leqslant z \leqslant b$:

$$S^*_\lambda(z) = \sum_{k=1}^{n} S^*_\lambda(z_k) 1_{\{z_{k-1}<z<z_k\}}, S^*_\lambda(z_k) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \theta^*_{j,n} \phi_j(z_k), \quad (3)$$

где $\lambda = (\lambda_1, ..., \lambda_n)$ - вектор весовых коэффициентов, который принадлежит некоторому конечному множеству $\Lambda \subset [0,1]^n$.

Данная оценка обладает следующим свойством.

Theorem 1 *Пусть наблюдения описываются уравнением* (1). *Тогда для любого* $n > 3$ *и* $\lambda = (\lambda_j)_{j\geqslant 1}$ *равномерно по всем* $\vartheta \in \Theta$ *оценка* (3) *превосходит по среднеквадратической точности оценку МНК.*

Список литературы

[1] Pchelintsev E.A., Perelevskiy S.S., Makarova I.A. Improved nonparametric estimation of the drift in diffusion processes // Ученые записки Казанского университета. Серия: Физико-математические науки. - 2018. - Vol. 160, № 2. - P. 364-372.

[2] Galtchouk L., Pergamenshchikov S. Adaptive Sequential Estimation for Ergodic Diffusion Processes in Quadratic Metric // Journal of Nonparametric Statistics. – 2011. – Vol. 23. – P. 255-285.

В.А. Петров

Мотивы Моравы и инвариант Роста

Главному однородному пространству относительно простой алгебраической группы отвечают инварианты в группе Брауэра, называемые алгебрами Титса. Если группа односвязна, эти инварианты тривиальны, но можно определить инвариант следующей степени, называемый инвариантом Роста.

Из результата И.А. Панина следует, что мотивы многообразий флагов с коэффициентами в группе Гротендика K0 изоморфны тогда и только тогда, когда алгебры Титса изоморфны. Мы предлагаем аналог этого результата для случая инварианта Роста; вместо группы Гротендика при этом надо рассматривать K-теорию Моравы K(2).

Valery Pchelintsev

On the spectral properties of elliptic operators in divergence form in quasidiscs [1]

We study spectral properties of two-dimensional elliptic operators in divergence form

$$(L_A f)(z) = -\mathrm{div}[A(z)\nabla f(z)], \quad z = (x,y) \in \Omega.$$

with the Neumann boundary condition in quasidiscs $\Omega \subset \mathbb{R}^2$.

We assume that the matrix A is defined a.e. in $\mathbb{R}^2$ and satisfies the following regularity conditions:

[1] The research was supported by RSF Grant No. 20-71-00037.

1) The matrix A belongs to the class of all 2×2 symmetric matrix functions $A(w) = \{a_{kl}(w)\}$ with measurable entries $a_{kl}(w)$ defined in $\mathbb{R}^2$ that satisfied to the additional condition $\det A = 1$ a.e. in $\mathbb{R}^2$.
2) The matrix A satisfies to the uniform ellipticity condition: there exists $1 \leq K < \infty$ such that the inequality

$$\frac{1}{K}|\xi|^2 \leq \langle A(w)\xi, \xi\rangle \leq K|\xi|^2, \text{ a.e. in } \mathbb{R}^2,$$

holds for every $\xi \in \mathbb{R}^2$.

Recall that a quasidisc is the image of the unit disc $\mathbb{D}$ under a quasiconformal mapping of the plane onto itself. The class of quasidiscs includes Lipschitz domains and some fractals domains (snowflakes). The Hausdorff dimension of the quasidisc's boundary can be any number in [1, 2).

Our approach is based on the theory of Sobolev extension operators and leads to the following results.

The first main result states [1]: *Let Ω and $\widetilde{\Omega}$ be quasidiscs in $\mathbb{R}^2$. If $\widetilde{\Omega} \supset \Omega$ then*

$$\mu_1(A, \Omega) \geq \frac{\mu_1(A, \widetilde{\Omega})}{\|E_\Omega\|^2},$$

where $\|E_\Omega\|$ denotes the norm of the linear continuous extension operator

$$E_\Omega : L^{1,2}_A(\Omega) \to L^{1,2}_A(\widetilde{\Omega}).$$

This result gives the quasi-monotonicity property of Neumann eigenvalues in quasidiscs.

By using previous result and the uniform ellipticity condidion of the matrix A we obtain [1]: *Let $\mathbb{D}_A$ be an A-quasidisc. Then the following inequality holds*

$$\mu_1(A, \mathbb{D}_A) \geq \frac{1}{4K} \cdot \left(\frac{j'_{1,1}}{R_{\mathbb{D}_A}}\right)^2,$$

where K is the ellipticity constant of the matrix A, $R_{\mathbb{D}_A} = \max\limits_{\mathbb{D}(0,1)} |\varphi_A^{-1}(x) - \varphi_A^{-1}(0)|$ and $j'_{1,1} \approx 1.84118$ denotes the first positive zero of the derivative of the Bessel function J_1.

This result gives a connection between principal frequencies of free non-homogeneous membranes and the smallest-circle problem.

These results were obtained jointly with V. Gol'dshtein and A. Ukhlov.

Список литературы

[1] Gol'dshtein V. Pchelintsev V., Ukhlov A. *Principal frequencies of free non-homogeneous membranes and Sobolev extension operators* // arXiv:2112.13371.

Evgeny Pchelintsev, Serguei Pergamenchtchikov, Roman Tenzin

Optimal sequential procedures for the quickest detection of the onset of the spread of epidemics[2]

[2]The research was supported by RSF Grant No. 22-21-00302.

In this paper we consider an stochastic extension of the Susceptible - Infected - Recovered (SIR) epidemic model, introduced in [2] on the finite time interval $[0, N]$. According to this model, the population is divided in three groups, (S)usceptible, (I)nfected, and (R)ecovered, that form a non-stationary Markov chain. Any individual can move through the states in order, $S \to I \to R$. The first transition, from S to I, occurs when an individual gets infected, and the second transition, from I to R, means recovery from the disease (and presumably, immunity from re-infection until the next epidemic season). At every time moment $0 \leq n \leq N$, members of the susceptible group can become infected with probability $0 < p < 1$. For epidemics, the change of infected rate from "non-epidemic value"θ_* to "epidemic value" θ $(0 < \theta_* < \theta < 1)$ means the beginning of an epidemic. The main problem is to detect this time moment as soon as possible. In this paper we study this problem in the framework of the epidemiological statistical models proposed in [1] in non asymptotic setting, i.e; for a fixed finite N on the basis of the Bayesian approach. Denoting the number of susceptible people at the time n by X_n and the last time moment before the epidemics beginning by ν assume, that $(X_n)_{1\leq n\leq \nu}$ and $(X_n)_{n>\nu}$ are homogeneous Markov processes with the values in the finite space $(\mathcal{X}, \mu)$, $\mathcal{X} = \{0, \dots, D\}$, where $D \in \mathbb{N}$ is the number of susceptible people at the initial time $n = 0$. Moreover, in this case we set $\mu\{0\} = \dots = \mu\{D\} = 1$. In this model, the conditional $X_n | X_{n-1}$ densities for $n \leq \nu$ and for $n > \nu$ are defined respectively as

$$f^*(y|x) = \binom{x}{y} (\theta_*)^{x-y} (1-\theta_*)^y \, \mathbf{1}_{\{x \geq y\}} \quad \text{and} \quad f(y|x) = \binom{x}{y} \theta^{x-y} (1-\theta)^y \, \mathbf{1}_{\{x \geq y\}} \,,$$

where $0 < \theta_* < \theta < 1$.

For this problem we develop new non-asymptotic Bayesian optimal procedures for quickest detection of the onset of epidemics in binomial epidemiological models on a finite time interval $[0, N]$ for uniform prior distribution, i.e. $\pi_n = \pi_* = 1/(N+1)$. To this end we use the methods of optimal stopping of homogeneous Markov processes. Based on the stochastic dynamic programming method and based on the modified Roberts statistics, Bayesian detection procedures for uniform prior distributions will be developed. Note that such methods provide ample opportunities for practical epidemiological analysis since a uniform (not informative) distribution over a given finite time interval does not contain any parameters and is the most adequate approach to the problem of early detection of epidemics in the absence of information about the distribution of the moments of the beginning of an epidemic. Note, that usually the Bayesian procedures are used only for geometrical prior distribution containing an unknown parameter, which makes practical use very much difficult. Moreover, It should be noted, as is shown in [3] it is not possible also to use the CUSUM procedures for the epidemic binomial models since the Kullback - Leibler information equals to zero. For this reason, we propose a Bayesian approach based on a uniform prior distribution of the onset time of an epidemic. To this end, we note, that in this case the Roberts statistics R_n can be for $n \geq 1$ represented as

$$R_n = \eta_n \sum_{i=0}^{n-1} \pi_i \, h_{i,n-1} + \pi_* = \eta_n R_{n-1} + \pi_* \,,$$

where $\eta_j = \eta(X_j, X_{j-1})$, $\eta(y, x) = f(y, x)/f^*(y, x)$ and $R_0 = \pi_*$.

Now we define the sequential procedure as

$$\mathbf{t}^*_\lambda = \min\left\{k \geq 0 : \mathbf{Q}^{N-k}_\lambda(g)(R_k, X_k) = R_k\right\} ,$$

where $g(r,x) = r$ and for any $r \in \mathbb{R}_+$ and $x \in \mathcal{X}$ the function $\mathbf{Q}^{N-k}_\lambda(g)(r,x)$ is defined as

$$\mathbf{Q}_\lambda(h)(r,x) = \max\left(h(r,x)\,,\, \mathbf{T}(h)(r,x) - \lambda r\right) \quad \text{and} \quad \mathbf{T}(h)(r,x) = \mathbf{E}^*_{r,x}\, h(R_1, X_1)\,.$$

Here $\mathbf{E}^*_{r,x}(\cdot) = \mathbf{E}^*\left(\cdot\,|R_0 = r\,,\, X_0 = x\right)$. The main result is the following.

Theorem 2 *Assume, that there exist* $0 < \lambda_\alpha < \infty$ *such that for* $0 < \alpha < 1$

$$\widetilde{\mathbf{P}}(\mathbf{t}^*_{\lambda_\alpha} < \nu) = \alpha\,. \tag{4}$$

Then the stopping time $\mathbf{t}^*_{\lambda_\alpha}$ *is optimal, i.e.*

$$\widetilde{\mathbf{E}}(\mathbf{t}^*_{\lambda_\alpha} - \nu)_+ = \inf_{\tau \in \mathcal{M}_\alpha} \widetilde{\mathbf{E}}(\tau - \nu)_+\,.$$

Now we note, that to study the equation (4) we note, that for $0 < \alpha < N/(N+1)$ one needs to chose parameter λ from the set

$$\Lambda_0 = \left\{\lambda \geq 0\,:\, \mathbf{Q}^N_\lambda(g)(\pi_*, D) > \pi_*\right\} \quad \text{and} \quad \lambda_{max} = \sup\{\lambda > 0\,:\, \mathbf{Q}^N_\lambda(g)(\pi_*, D) > \pi_*\}\,.$$

In this case for $\lambda \in \Lambda_0$ the equation (4) can be rewritten as

$$F(\lambda) = \alpha\,,$$

where

$$F(\lambda) = \sum_{m=1}^{N-1} \sum_{(k_1,\ldots,k_m)\in\mathcal{X}^m} \mathbf{1}_{\left\{\min_{1\leq j\leq m}\left(\mathbf{Q}^{N-j}_\lambda(g)(r_j,k_j) - r_j\right)=0\right\}} q^*_m(k_1,\ldots,k_m)$$

and

$$q^*_m(k_1,\ldots,k_m) = \prod_{\iota=1}^m f^*(k_\iota|k_{\iota-1}) = \prod_{\iota=1}^m \binom{k_{\iota-1}}{k_\iota}(\theta_*)^{k_{\iota-1}-k_\iota}(1-\theta_*)^{k_\iota}\, \mathbf{1}_{\{k_{\iota-1}\geq k_\iota\}} \quad \text{and} \quad k_0 = D\,.$$

So, in this case we chose λ as

$$\lambda^*_\alpha = \sup\{0 \leq \lambda \leq \lambda_{max}\,:\, F(\lambda) \leq \alpha\}\,.$$

Список литературы

[1] Baron, M., Choudhary K. and Yu, X. (2013) Change-Point Detection in Binomial Thinning Processes, with Applications in Epidemiology // Sequential Analysis: Design Methods and Applications, **32**, 350-367.

[2] Kermack, W. O. and McKendrick, A. G. (1927) A Contribution to the Mathematical Theory of Epidemics // Proceedings of Royal Society of London, Series A 115, 700-721.

[3] Pergamenchtchikov, S. M., Tartakovsky, A. G. and Spivak, V. (2022) Minimax and pointwise sequential changepoint detection and identification for general stochastic models // Journal of Multivariate Analysis, **190**, 104977.

Roman Romanov

Determinantal processes and division invariant spaces

We explore the link between determinantal point processes and division invariant reproducing kernel Hilbert spaces. An example of such spaces is given by the classical de Branges spaces of entire functions. A wide class of quasi-invariant processes is described in the functional terms.

А.Г. Сергеев

Эрмитовы уравнения Янга–Миллса и их обобщения

Эрмитово уравнение Янга–Миллса — это нелинейное уравнение на эрмитову метрику, заданную на голоморфном векторном расслоении над компактным кэлеровом многообразием. Его можно также рассматривать как уравнение на унитарную связность, ассоциированную с указанной эрмитовой метрикой. Если размерность базового многообразия равна 1, то решениями эрмитова уравнения Янга–Миллса являются плоские связности. Если эта размерность равна 2, решениями являются анти-автодуальные связности, называемые иначе инстантонами. Тем самым, эрмитовы уравнения Янга–Миллса можно рассматривать как многомерное обобщение уравнений дуальности.

Основным результатом первой части доклада, относящейся к эрмитовым уравнениям Янга–Миллса, является теорема Дональдсона о существовании и единственности решения граничной задачи Дирихле для эрмитова уравнения Янга–Миллса на компактном кэлеровом многообразии с краем.

Вторая часть посвящена деформированному эрмитову уравнению Янга–Миллса. Это обобщение эрмитова уравнения Янга–Миллса возникло в работах Яу с соавторами. Деформированное эрмитово уравнение Янга–Миллса редуцируется к эрмитову уравнению Янга–Миллса в пределе большого объема. Существование решения деформированного эрмитова уравнения Янга–Миллса при дополнительных условиях типа положительности кривизны доказывается с помощью потока теплопроводности. Этот поток существует при всех временах и в пределе большого объема сходится к решению деформированного эрмитова уравнения Янга–Миллса.

Evgeny Smirnov

Polytopes, Pukhlikov-Khovanskii rings, and K-theory

In 1992, Khovanskii and Pukhlikov provided a construction that associates a commutative graded algebra with Poincare duality to a homogeneous polynomial f on a vector space V. One especially interesting example of this construction is when f is the volume polynomial on a suitable space of (virtual) polytopes. As particular cases of this construction, we can obtain the cohomology rings of toric and flag varieties.

I will present this construction and its recent generalization. I will explain how to associate an algebra with Gorenstein duality to any function on a lattice. In the case when this function is the Ehrhart function on a lattice of integer (virtual) polytopes, this construction recovers K-theory of toric and full flag varieties.

The talk is based on our work in progress with Leonid Monin.

Dmitry Stolyarov

Hardy—Littlewood—Sobolev inequality for p=1

I will speak about the limiting case of the Hardy–Littlewood–Sobolev inequality for p = 1. While the naive extension of HLS to p = 1 fails and the example that breaks the endpoint inequality is given by approximations of a delta measure, there are a few options how to obtain a correct inequality in the limit case. One of them, suggested by the work of Bourgain–Brezis, Van Schaftingen, and others, is to exclude the delta measures by imposing a linear translation and dilation invariant constraint on the functions in question. Another, suggested by Maz'ja, is based on adding certain non-linearity to the inequality. I will survey new results in this direction.

М.Ю. Тяглов

Распределение корней многочленов с вполне неотрицательной матрицей Гурвица

Матрица $H_n(p) = (a_{2j-i})$ размера $n \times n$, состоящая из коэффициентов многочлена

$$p(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n, \qquad a_0 > 0,$$

называется конечной матрицей Гурвица. Соответственно матрица $\mathcal{H}_\infty(p) = (a_{2j-i})_{i,j\in\mathbb{Z}}$ называется бесконечной матрицей Гурвица.

Известно, что [1, 2] из устойчивости многочлена $p(z)$ (все корни в открытой левой полуплоскости) следует полная неотрицательность обеих матриц $\mathcal{H}_n(p)$ и $\mathcal{H}_\infty(p)$. Однако полная неотрицательность конечной матрицы Гурвица $H_n(p)$ не влечёт устойчивость многочлена $p(z)$.

В этом докладе, мы покажем, что полная неотрицательность бесконечной матрицы Гурвица $\mathcal{H}_\infty(p)$ достаточна для квази-устойчивости многолчена $p(z)$ (все корни в замкнутой левой полуплоскости), а также полностью опишем расположение нулей многочлена $p(z)$ в случае, когда его конечная матрица Гурвица $H_n(p)$ вполне неотрицательна.

Список литературы

[1] B.A. Asner, *On the total nonnegativity of the Hurwitz matrix.* SIAM J. Appl. Math., **18**, 1970, pp. 407–414.

[2] J.H.B. Kemperman, *A Hurwitz matrix is totally positive,* SIAM J. Math. Anal., **13**, 1982, pp. 331–341.

К.Ю. Федоровский

L-analytic capacities and Dirichlet problem for elliptic second order PDE with constant complex coefficients.

В докладе планируется рассмотреть два сюжета, связанные с однородными эллиптическими дифференциальными уравнениями с постоянными комплексными коэффициентами: задачу о свойствах емкостей, связанных с такими уравнениями, и задачу Дирихле не сильно эллиптических уравнений второго порядка с постоянными комплексными коэффициентами на плоскости. В первой части речь пойдет о свойствах BL- и CL-емкостей, связанных с однородными эллиптическими дифференциальными уравнениями $Lf = 0$ второго порядка с постоянными комплексными коэффициентами в евклидовых пространствах размерности 3 и выше и определяемых классами ограниченных и непрерывных решений таких уравнений, соответственно. Важную роль при изучении этих емкостей играют их "положительные" аналоги, которые определяются при помощи потенциалов положительных борелевских мер. Планируется представить и обсудить результат о том, что для всех эллиптических операторов рассматриваемого вида соответствующие "положительные" емкости соизмеримы (с точностью до мультипликативной постоянной, зависящей только от рассматриваемого оператора) с классической гармонической емкостью теории потенциала.

Во второй части доклада речь пойдет о задаче Дирихле для решений однородных эллиптических уравнений второго порядка с постоянными комплексными коэффициентами в областях в комплексной плоскости. Будет показано, что любая жорданова область с границей класса C^{1+a} при $0 < a < 1$ не является регулярной относительно задачи Дирихле для любого не сильно эллиптического уравнения второго порядка с постоянными комплексными коэффициентами. Так как существуют области с Липшицевыми границами, регулярные относительно задачи Дирихле для бианалитических функций, то указанный результат близок к точному.

Первая часть доклада основана на совместной работе автора и П.В. Парамонова, а вторая – на совместной работе автора, М.Я. Мазалова и А.О. Багапша.

А.А. Хартов

Рационально безгранично делимые функции распределения

Новый класс так называемых рационально безгранично делимых функций распределения (ф.р.) является естественным и очень значительным расширением хорошо изученного класса безгранично делимых ф.р. Согласно определению ф.р. на вещественной прямой называется *рационально безгранично делимой*, если ее свертка с безгранично делимой ф.р. безгранично делима. Несложно показать, что в таком случае ее характеристическая функция (преобразование Фурье–Стилтьеса) допускает (как и для безгранично делимых ф.р.) *представление Леви–Хинчина* с некоторым вещественным параметром сдвига и с некоторой необязательно монотонной спектральной функцией, имеющей ограниченную вариацию на всей вещественной прямой. Примеры ф.р. с такими характеристическими функциями встречались в хорошо известных классических монографиях Гнеденко и Колмогорова, Линника и Островского. Однако, определение и соответствующий класс были введены только в 2011 г. в одной работе Линднера и Сато в рамках некоторых задач теории случайных процессов. Недавно в статье Линднера, Пэна и Сато (Trans. Amer. Math. Soc., 370, 2018) был сделан первый большой анализ класса рационально безгранично делимых ф.р. на основе представлений Леви–Хинчина. Сейчас данный класс активно изучается и находит свои приложения в других областях. В докладе будет сделан обзор основных определений и фактов связанных с этим классом, а также представлены некоторые новые результаты о нем.

Håkan Hedenmalm

Asymptotics of weighted Carleman polynomials

George B. Shabat

On random triangulations and quadrangulations of surfaces

The statistics of random triangulations and quadrangulations of surfaces has been studied in the recent decades from various points of view. The present talk will be devoted to the complex structures defined by the euclidean metrics on the polygons. The old theorem of the speaker and Vladimir Voevodsky will be reproduced, according to which the equilateral structure on the triangles correspond to all the curves over number fields; the similar theorem concerning the right squares will be presented. The action of the absolute Galois group on the triangulations and quadrangulations of surfaces will be defined and the problems concerning the statistics of orbits formulated.