Операторные оценки при усреднении операторов типа Леви с периодическими коэффициентами

Основано на работе Е. А. Жижиной, А. Л. Пятницкого, В. А. Слоуща, Т. А. Суслиной.

В $L_2(\mathbb{R}^d)$ рассматривается самосопряженный оператор $\mathbb{A}_\varepsilon$, $\varepsilon > 0$, вида

$$(\mathbb{A}_\varepsilon u)(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^d} \mu(\mathbf{x}/\varepsilon, \mathbf{y}/\varepsilon) \frac{(u(\mathbf{x}) - u(\mathbf{y}))}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^{d+\alpha}} \, d\mathbf{y},$$

где $0 < \alpha < 2$. Предполагается, что $\mu(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ — функция, $\mathbb{Z}^d$-периодическая по каждой переменной, причем $0 < \mu_- \leqslant \mu(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leqslant \mu_+ < \infty$ и $\mu(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mu(\mathbf{y}, \mathbf{x})$. Строгое определение оператора $\mathbb{A}_\varepsilon$ дается через соответствующую замкнутую квадратичную форму, заданную на классе Соболева $H^{\alpha/2}(\mathbb{R}^d)$. Показано, что при $\varepsilon \to 0$ резольвента $(\mathbb{A}_\varepsilon + I)^{-1}$ сходится к резольвенте $(\mathbb{A}^0 + I)^{-1}$ по операторной норме в $L_2(\mathbb{R}^d)$. Здесь $\mathbb{A}^0$ — эффективный оператор, заданный тем же выражением с коэффициентом μ^0, равным среднему значению функции $\mu(\mathbf{x}, \mathbf{y})$. Получена оценка нормы разности резольвент $(\mathbb{A}_\varepsilon + I)^{-1} - (\mathbb{A}^0 + I)^{-1}$ порядка $O(\varepsilon^\alpha)$ при $0 < \alpha < 1$, $O(\varepsilon(1 + |\ln \varepsilon|)^2)$ при $\alpha = 1$ и $O(\varepsilon^{2-\alpha})$ при $1 < \alpha < 2$.