Приложение 2 к методике проведения и критериям оценивания аттестационного испытания для претендентов на перевод и восстановление по образовательной программе бакалавриата «Математика»

Примеры задач по алгебре

1. Покажите, что если H — собственная подгруппа группы G, то дополнение $G\setminus H$ порождает G.

2. Пусть T_n — группа обратимых верхнетреугольных матриц $n \times n$ с коэффициентами в поле F. Пусть U_n — подгруппа T_n, состоящая из матриц с единицами на диагонали. Покажите, что U_n — нормальная подгруппа, и докажите, что $T_n/U_n \simeq (F^\times)^n$, где $F^\times$ — группа обратимых элементов поля.

3. Пусть $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n$ — набор элементов поля F, M — матрица $n \times n$, $M_{ij} = x_i + y_j$. Покажите, что ранг M не превосходит 2.

4. Пусть V — конечномерное векторное пространство над полем F, $\lambda, \mu \in V^*$. Покажите, что, если для всех $v \in V$ верно $\lambda(v)\mu(v) = 0$, то либо $\lambda = 0$, либо $\mu = 0$.

5. Для $m \in \mathbb{N}$ обозначим через S_m число остатков по модулю m, являющихся квадратами (например, 2 — квадрат по модулю 7). Покажите, что, если натуральные числа m и n взаимно просты, то $S_{mn} = S_m S_n$.

Примеры задач по геометрии и топологии

1. Докажите, что любое отображение из дискретного пространства является непрерывным.

2. Перечислите все топологии на двухточечном множестве.

3. Докажите, что сумма двух метрик (заданных на одном множестве) является метрикой.

4. Найдите плоскость, проходящую через $(1, 0, 0)$, параллельную прямой $x = y = z$ и перпендикулярную плоскости $2x - y + z - 1 = 0$.

5. Докажите, что эллипс и гипербола с общими фокусами перпендикулярны.

Примеры задач по теории вероятностей

1. Брошено 6 костей. Постройте вероятностное пространство и найдите вероятности следующих событий.

$$\begin{aligned} A &= \{\text{среди выпавших нет четвёрок}\}. \\ B &= \{\text{выпало ровно три четвёрки}\}. \\ C &= \{\text{выпала хотя бы одна четвёрка}\}. \\ D &= \{\text{все цифры выпали хотя бы по одному разу.}\} \end{aligned}$$

2. Каждый из двух игроков подбрасывает правильную монету n раз. С какой вероятностью у обоих выпадет одинаковое число "орлов"?

3. Расчёты двух орудий стреляют по трём самолётам, выбирая цель с равными вероятностями (1/3) и независимо друг от друга. Чему равна вероятность того, что сбит ровно один самолёт, если вероятность попадания из орудий равна 0.2 и 0.3 соответственно?

4. Пусть $n \geq 3$. Случайные величины $X_1, \ldots, X_n$ независимы и имеют одинаковые распределения
$$X_j = \begin{cases} +1, & \text{с вероятностью } p, \\ -1, & \text{с вероятностью } 1-p. \end{cases}$$
Рассмотрим круговую сумму
$$S := X_1X_2 + X_2X_3 + \cdots + X_{n-1}X_n + X_nX_1.$$
Найдите $\mathbb{E}S^2$. Вычислите значение $\mathbb{E}S^2$ при $n = 12, p = 1/3$.

5. Правильную монетку бросают до тех пор, пока орёл не выпадет дважды подряд. Найдите математическое ожидание числа сделанных бросков.

Примеры задач по математическому анализу

1. Найдите предел
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(\sin(x)) - x\sqrt[3]{1-x^2}}{x^5}.$$

2. Найдите первообразную
$$\int x\sqrt{1+x}\, dx.$$

3. Сходится ли ряд
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+\sin(n)}?$$

4. Является ли функция $\frac{\sin(x)}{x}$, доопределённая в нуле по непрерывности, липшицевой на $\mathbb{R}$?

5. Найдите предел
$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{k}{n}\right) \cos\left(\frac{2k}{n}\right).$$

Примеры задач по теоретической информатике и дискретной математике

1. Покажите, что всякий граф с числом вершин n и числом ребер m содержит независимое множество с числом вершин не менее $\frac{n^2}{4m}$.

2. Пусть за круглым столом сидит по k представителей каждой из n стран. При каких k можно выбрать в каждой стране по представителю так, чтобы никакие двое выбранных не сидели рядом?

3. Докажите, что матроид разрезов графа (т.е. независимые множества — подмножества ребер графа, такие что удаление подмножества не увеличивает число компонент связности) действительно является матроидом.

4. Построить машину Тьюринга, распознающую степени двойки, заданные в унарной записи.

5. Построить алгоритм для нахождения наибольшей общей подпоследовательности трёх строк.