

Листочек 0. Тестовый.

Между духом и материей посредничает математика.

1. Каждый из 500 студентов обязан посещать хотя бы один из трех спецкурсов: по математике, физике, астрономии. Три спецкурса посещают 10 студентов, по математике и астрономии – 25 студентов, спецкурс только по физике – 80 студентов. Известно также, что спецкурс по математике посещают 345 студентов, по физике – 145, по астрономии – 100 студентов. Сколько студентов посещают спецкурс только по астрономии?
2. Докажите неравенство

$$\frac{1}{\sum_{k=1}^n \frac{1}{x_k}} \leq \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n x_k, \quad x_1, \dots, x_n > 0.$$

3. Докажите, что число $\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{3}$ иррационально.
4. Сколько есть натуральных чисел меньших 120 взаимнопростых с числом 120?
5. Помидоры, которые вырастила бабушка, на 99.5% состоят из воды и весят 100 кг, но на солнце часть воды испаряется сквозь кожуру. День выдался жарким, и к вечеру воды в помидорах стало уже 99.0%. Сколько теперь весят бабушкины помидоры?
6. В прямоугольном равнобедренном треугольнике проведена медиана к катету, а к ней — перпендикуляр из вершины прямого угла. Найдите отношение, в котором этот перпендикуляр делит гипотенузу.
7. Оркестр из 30 музыкантов исполняет 4-ю симфонию Бетховена за 40 минут. За какое время оркестр из 60 музыкантов исполнит 8-ю симфонию Бетховена?
8. Опишите все последовательности $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ такие, что

$$\forall k > 0, \forall l \geq k, \exists m > l : |x_m| > |x_k| + |x_l|.$$

9. Найдите все такие многочлены $P(x)$ с вещественными коэффициентами, что многочлены $P(x^2 + x + 1)$ и $P(x^2) + P(x) + P(1)$ равны.
10. Сколько решений у уравнения $\cos x = x$?
11. Какие фигуры заданы следующими соотношениями в комплексных числах: $|z^2| > |z|$, $\operatorname{Re} z > |z| - 1$, $z + i\bar{z}$ - вещественно?
12. Найти все значения a , при каждом из которых уравнение $4x - |3x - |x + a|| = 9|x - 1|$ имеет хотя бы один корень.