

# Вопросы к коллоквиуму по математическому анализу

Семестр 1, 31 октября 2018

1. Формулировка теоремы о существовании линейно упорядоченного полного поля. Единственность нейтральных элементов по сложению и умножению, неравенства  $1 > 0$ ,  $x^2 \geq 0$ , сложение и умножение неравенств.
2. Теорема о существовании наименьшего элемента в множестве верхних граней ограниченного сверху множества, определение  $\sup$  и  $\inf$  и их описание на языке неравенств. Лемма Кантора о вложенных отрезках.
3. Определение множества натуральных чисел  $\mathbb{N}$ . Доказательство принципа математической индукции. Пример: неравенство Бернулли. Теорема: если  $n \in \mathbb{N}$  и  $n > 1$ , то  $n - 1 \in \mathbb{N}$ .
4. Теорема: если  $n, m \in \mathbb{N}$  и  $n > m$ , то  $n - m \in \mathbb{N}$ . Теорема: любое ограниченное подмножество  $\mathbb{N}$  имеет минимальный и максимальный элемент. Доказательство принципа Архимеда.
5. Теорема о существовании и единственности  $\sqrt[n]{x}$  для  $x \geq 0$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Иррациональность  $\sqrt{2}$ .
6. Замкнутость множества в топологическом пространстве в терминах его предельных точек. Теорема:  $\sup E \in E$  для любого замкнутого ограниченного сверху множества  $E \subset \mathbb{R}$ . Теорема: множество рациональных чисел  $\mathbb{Q}$  плотно в  $\mathbb{R}$ .
7. Теорема: подмножество  $\mathbb{R}$  компактно тогда и только тогда, когда оно замкнуто и ограничено. Компактность отрезка  $[0, 1]$ .
8. Теорема: бесконечное ограниченное подмножество  $\mathbb{R}$  имеет предельную точку. Теорема: из любой ограниченной последовательности вещественных чисел можно выбрать сходящуюся подпоследовательность.
9. Теорема: подмножество  $\mathbb{R}$  связно тогда и только тогда, когда оно является промежутком.
10. Теорема: непрерывный образ компакта – компактен. Теорема Вейерштрасса о максимальном значении непрерывной функции на компакте.
11. Теорема: непрерывный образ связного множества – связан. Теорема Больцано-Коши о среднем значении непрерывной функции на промежутке.
12. Равносильность определений непрерывности а языке окрестностей и на  $\varepsilon - \delta$ -языке. Теорема: непрерывная функция на компактном подмножестве  $\mathbb{R}$  равномерно непрерывна.
13. Последовательность элементов топологического пространства и ее предел. Аксиома  $T_2$  и единственность предела последовательности в хаусдорфовом топологическом пространстве. Последовательности вещественных чисел и их пределы на  $\varepsilon - \delta$ -языке. Равносильность двух определений предела. Ограниченность последовательности, имеющей предел.
14. Арифметические свойства пределов последовательностей. Если  $\lim x_n < \lim y_n$ , то  $x_n < y_n$  при больших  $n$ .
15. Переход к пределу в неравенствах. Теорема о двух миллионерах.

16. Формулировка и доказательство критерия Коши для последовательностей и для рядов.
17. Предел монотонной последовательности. Бесконечные пределы последовательностей и их арифметические свойства.
18. Сходимость подпоследовательности сходящейся последовательности. Неравенство  $\liminf x_n \leq \lim x_{n_k} \leq \limsup x_n$ .
19. Теорема: верхний предел совпадает с наибольшим из частичных пределов. Сходимость последовательности в терминах ее верхнего и нижнего пределов.
20. Критерий Коши для рядов. Сходимость к нулю членов сходящегося ряда. Сходимость рядов с положительными членами. Признак сравнения сходимости рядов. Критерий сходимости ряда  $\sum n^{-p}$ .
21. Признаки Дирихле и Лейбница сходимости рядов.
22. Определение и единственность предела отображения в топологическом пространстве. Равносильность определений предела функции на языке окрестностей и на  $\varepsilon - \delta$ -языке. Взаимосвязь существования пределов  $\lim_{E_1 \cup E_2} f$ ,  $\lim_{E_1} f$ ,  $\lim_{E_2} f$ .
23. Существование предела функции  $f$  в терминах последовательностей  $\{f(x_n)\}$ . Предел суперпозиции функций.
24. Непрерывность функции в точке на языке пределов. Сумма, произведение, частное непрерывных функций.
25. Ограниченность функции, имеющей предел. Отделенность от нуля функции, имеющей ненулевой предел. Критерий Коши для пределов функций.
26. Предел монотонной функции. Существование наибольшего элемента в множестве частичных пределов.
27. Существование конечного предела функции в терминах ее верхнего и нижнего пределов.
28. Окрестности бесконечности и общее определение предела. Определение бесконечных пределов на языке неравенств. Арифметические операции с бесконечными пределами функций.
29.  $O$ -символика, бесконечно малые, эквивалентность. Примеры:  $c_0 + \dots + c_n x^n \sim c_n x^n$  и  $n^m = o(q^n)$  для любого  $q > 1$ .
30. Производная в точке. Производная суммы, произведения, частного.
31. Производная суперпозиции функций.
32. Производная обратной функции.
33. Необходимое условие внутреннего локального экстремума. Теорема Ролля.
34. Теорема Лагранжа о среднем значении. Функции с нулевой производной на интервале. Первообразная функции и степень ее не единственности.
35. Теорема: дифференцируемая функция нестрого возрастает на интервале тогда и только тогда, когда ее производная неотрицательна.
36. Формула Тейлора с остатком в форме Пеано.
37. Неравенство Йенсена для выпуклых функций.
38. Теорема: дифференцируемая функция  $f$  (не)строго выпукла на  $(a, b)$  тогда и только тогда, когда ее производная (не)строго возрастает на  $(a, b)$ . Выпуклость дважды дифференцируемых функций.

# Математический Анализ

Семестр 1, осень 2018

Р. В. Бессонов

Вопросы 1–38 в списке вопросов к коллоквиуму.

39. Обобщенная теорема Лагранжа о среднем (теорема Коши) и правило Лопиталья. Существование производной в концевой точке отрезка для непрерывной функции на отрезке, производная которой имеет предел в этой точке.
40. Определение интегрируемости по Риману и интеграла Римана. Монотонность сумм Дарбу по разбиению. Для любой пары разбиений нижняя сумма Дарбу меньше верхней. Критерий интегрируемости по Риману в терминах разности верхних и нижних сумм Дарбу.
41. Определение множества меры ноль. Объединение не более чем счетного числа множеств меры ноль – множество меры ноль. Счетные множества имеют меру ноль. Канторово множество имеет меру ноль. Отрезок  $[0, 1]$  не является множеством меры ноль.
42. Если функция непрерывна почти всюду, то она интегрируема по Риману
43. Если функция интегрируема по Риману, то она непрерывна почти всюду.
44. Включение  $C[a, b] \subset R[a, b]$ . Замкнутость  $R[a, b]$  относительно арифметических операций. Суперпозиция непрерывной функции и функции из  $R[a, b]$  лежит в  $R[a, b]$ . Монотонные функции имеют не более чем счетное множество разрывов, если ограничены, то интегрируемы по Риману.
45. Линейность интервала Римана. Сужение интегрируемой по Риману функции на отрезок интегрируемо по Риману. Интеграл - аддитивная функция отрезка. Основная оценка интеграла. Суммы Римана и интеграл Римана для непрерывной функции.
46. Дифференцирование интеграла по верхнему пределу интегрирования в точке непрерывности подынтегральной функции. Формула Ньютона–Лейбница. Формула интегрирования по частям. Формула замены переменной.
47. Формула Тейлора с интегральным остатком. Интегральная теорема о среднем.
48. Формула Тейлора с остатком Лагранжа.
49. Определения поточечной и равномерной сходимости последовательностей и рядов функций. Критерий Коши равномерной сходимости. Признак Вейерштрасса равномерной сходимости рядов. Пример:  $x^n$  поточечно сходится на  $[0, 1]$  к разрывной функции. Доказательство того, что эта сходимость не равномерна.
50. Теорема Стокса-Зейделя. Замкнутость класса  $C(E)$  относительно равномерной сходимости.

51. Замкнутость класса  $R[a, b]$  относительно равномерной сходимости, предельный переход под знаком интеграла. Предел равномерно сходящегося ряда. Дифференцируемость предела последовательности функций, производные которых непрерывны и сходятся равномерно. Дифференцируемость сходящегося ряда гладких функций, ряд из производных которых сходится равномерно.
52. Пример Ван дер Вардена
53. Комплексные числа: определение, вещественная и мнимая часть числа, сопряженное число, свойства модуля комплексного числа, топология на  $\mathbb{C}$ , сходимость последовательности комплексных чисел на  $\varepsilon$ - $\delta$  языке, в терминах вещественной и мнимой части, критерий Коши для  $\mathbb{C}$ .
54. Определение степенного ряда, признак Коши сходимости рядов, радиус сходимости степенного ряда (формула Адамара).
55. Независимость сходимости и значения суммы абсолютно сходящегося ряда от перестановки его членов. Умножение абсолютно сходящихся рядов.
56. Производная по комплексной переменной: определение, дифференцируемость степенного ряда в круге сходимости, формула для производной.
57. Определение экспоненты, оценка  $(n/2)^{n/2} \leq n!$ , сходимость степенного ряда для экспоненты, число  $e$ , бином Ньютона,  $\exp(z_1 + z_2) = \exp(z_1) \exp(z_2)$ ,  $(\exp z)' = \exp z$ .
58. Свойства экспоненты: неотрицательность и строгое возрастание на  $\mathbb{R}$ , биективность из  $\mathbb{R}$  в  $(0, +\infty)$ . Определение  $\log x$ , дифференцируемость  $\log x$ ,  $(\log x)' = 1/x$ , возрастание  $\log$ ,  $\log(x_1 x_2) = \log x_1 + \log x_2$ . Определение  $a^z$  для  $a > 0$ . Согласованность определения со старым определением степени, формула  $(a^z)' = \log a \cdot a^z$  для  $a > 0$ .
59. Оценки  $x^\alpha = o(e^x)$  при  $x \rightarrow +\infty$  для любого  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,  $\log x = o(x^\alpha)$  при  $x \rightarrow +\infty$  для любого  $\alpha > 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow +0} x^\alpha \log x = 0$  для любого  $\alpha > 0$ , предел  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (1 + \frac{1}{x})^x = e$ .
60. Определение,  $\sin z$ ,  $\cos z$ , сумма квадратов, вещественность на вещественной оси, производные, формулы для суммы аргументов, существование нуля  $\cos x$ , определение  $\pi$ , значения  $\cos \pi/2, \dots, \sin 2\pi$
61.  $2\pi$ -периодичность  $\sin z$ ,  $\cos z$ ,  $e^{iz}$ ;  $e^{iz} = 1$  тогда и только тогда, когда  $z = 2\pi k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ ,  $2\pi$  – наименьший период  $\sin x$ ,  $\cos x$ .
62. Определение касательной и секущей к графику функции. Надграфик выпуклой функции выше касательной, секущая выше графика выпуклой функции. График  $\sin x$ , неравенства  $\sin x \leq x$ ,  $\sin x \geq 2x/\pi$ ,  $e^x \geq 1 + x$ ,  $\log(1 + x) \leq x$ .
63. Определение ряда Тейлора для функции  $f \in C^\infty$  на открытом подмножестве  $\mathbb{R}$  или  $\mathbb{C}$ . Ряд Тейлора степенного ряда совпадает с ним самим. Ряды Тейлора для  $e^z$ ,  $\sin z$ ,  $\cos z$ ,  $\log(1 + x)$ . Ряды Тейлора для функций  $1/(1 + x^2)$  и  $e^{-1/x^2}$ .
64. Представление комплексного числа в виде  $z = re^{i\phi}$ . Формула Муавра. Алгебраическая замкнутость поля комплексных чисел и разложение многочленов на множители

65. Определение, неотрицательность, аддитивность вариации. Функция  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  имеет ограниченную вариацию тогда и только тогда, когда ее можно представить в виде разности двух ограниченных монотонных функций. Функции ограниченной вариации имеют счетное число разрывов и интегрируемы по Риману.
66. Определение  $\mathbb{R}^n$ , скалярное произведение, норма в  $\mathbb{R}^n$ , их свойства, неравенство КБШ. Топология на  $\mathbb{R}^n$ , сходимость и покоординатная сходимость в  $\mathbb{R}^n$ .
67. Производная и интеграл векторнозначной функции. Формула Ньютона-Лейбница. Основная оценка интеграла.
68. Вариация непрерывно дифференцируемой векторнозначной функции равна интегралу нормы ее производной
69. Путь в метрическом пространстве, носитель пути, эквивалентные пути, простой путь, простой замкнутый путь, длина пути в метрическом пространстве, спрямляемый путь, гладкий путь. Формула для длины гладкого пути в  $\mathbb{R}^n$ . Простые пути с одинаковым носителем имеют одинаковую длину. Вычисление длины верхней полуокружности единичного радиуса.
70. Несобственные интегралы, абсолютная и условная сходимость. Критерий Коши. Признак сравнения. Абсолютная сходимость влечет условную. Сходимость и расходимость интеграла от степенной функции вблизи нуля и бесконечности.
71. Интегральный признак сходимости, его частный случай для убывающих неотрицательных функций. Критерий сходимости рядов  $\sum_{k \geq 2} \frac{1}{k^\alpha \log^\beta k}$  для  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ .
72. Признак Абеля-Дирихле. Пример: условная, но не абсолютная сходимость  $\int_{\mathbb{R}} \frac{\sin x}{x} dx$ . Формула интегрирования по частям и формула замены переменной для несобственных интегралов.
73. Формула Сонины  $\sum_1^n f(k) = \int_1^n f(x) dx + \frac{f(1)+f(n)}{2} + \int_1^n (\{t\} - 1/2) f'(t) dt$ . Асимптотика частичных сумм гармонического ряда с точностью до  $O(\frac{1}{n})$ .
74. Формула Стirlingа (без вычисления точной константы).
75. Вычисление точной константы в формуле Стирлинга.
76. Интеграл Эйлера-Пуассона.