Математический анализ
Семестр 3, осень 2019
Р. В. Бессонов

1. Наивная длина, теорема об отсутсвии наивной длины на $\mathbb{R}$. Полукольцо, алгебра, σ-алгебра множеств. Примеры. Измеримые множества. Минимальная σ–алгебра, содержащая данную систему множеств. Борелевская σ-алгебра. Лемма о подчиненном разбиении.

2. Конечная и счетная аддитивность. Мера. Пример: считающая мера. Монотонность конечно-аддитивных функций на полукольце. Счетная полуаддитивность равносильна счетной аддитивности для конечно-аддитивных функций множества на полукольце. Непрерывность сверху равносильна счетной аддитивности для конечно-аддитивных функций множества на σ-алгебре. Непрерывность меры снизу на множествах конечной меры

3. Длина - счетно-аддитивная функция на полукольце ячеек $\mathcal{P}_1$ в $\mathbb{R}$

4. Внешняя мера и измеримость относительно неё. Полная мера. Измеримые множества относительно внешней меры образуют σ–алгебру, сужение внешней меры на которую счетно-аддитивно и является полным.

5. Стандартное продолжение счетно-аддитивной функции на полукольце. Теорема Каратеодори. Полнота стандартного продолжения счетно-аддитивной функции и формула для него в терминах значений меры на полукольце.

6. Мера Лебега на $\mathbb{R}$. Лебеговская σ-алгебра содержит борелевскую и не совпадает с $2^{\mathbb{R}}$. σ-алгебра при стандартном продолжении с точностью до множеств меры нуль аппроксимируется элементами борелевской оболочки полукольца. Измеримость и мера Лебега точки, счетного множества, обобщенного канторова множества.

7. Определение измеримой функции Измеримость прообраза борелевского множества под действием измеримого отображения. Сужение и измеримое продолжение измеримой функции измеримо. Измеримость $\sup_n f_n$, $\inf_n f_n$, $\liminf f_n$, $\limsup f_n$.

8. Простые функции. Существование общего допустимого разбиения. Теорема об аппроксимации. Линейные комбинации, произведения измеримых функций измеримы. Непрерывные функции измеримы. Суперпозиция непрерывной функции и измеримой - измерима. Модуль, степень, $\max(f, g)$, $\min(f, g)$ – измеримы.

9. Определение интеграла по измеримому множеству для простых неотрицательных функций. Корректность определения (независимость от разбиения). Определение для интеграла по измеримому множеству для измеримых неотрицательных функций. Корректность определения (для простых новый интеграл совпадает со старым). Интегрируемые и суммируемые функции, определение интеграла для них.

10. Свойства интеграла: монотонность относительно функции, интеграл по множеству нулевой меры, интеграл произведения функции на характеристическую функцию измеримого множества. Теорема Леви для неотрицательных функций

11. Линейность интеграла. Интеграл модуля и модуль интеграла. Интеграл от неотрицательной измеримой функции - мера. Интеграл по дискретной мере. Интеграл по множеству положительной меры от положительной функции - положителен. Неравенство Чебышева. Интеграл Римана и интеграл Лебега. Интеграл функции Дирихле.

12. Сходимость почти всюду. Сходимость по мере. Пример: сходимость по мере не влечет сходимости почти везде. Теорема: на множестве конечной меры сходимость почти везде влечет сходимость по мере. Теорема Рисса. Пример сходящейся почти всюду, но не сходящейся по мере последовательности функций.

13. Общая теорема Леви. Теорема Лебега о мажорированной сходимости (случай сходимости по мере и почти всюду). Лемма Фату

14. Неравенство Йенсена для вероятностных мер. Неравенство Гельдера. Неравенство Минковского.

15. Определение пространства $L^p(X,\mu)$, его норма. Полнота пространств $L^p(X,\mu)$. Простые функции, лежащие в $L^p(X,\mu)$, плотны в $L^p(X,\mu)$.

16. Регулярность конечных борелевских мер на метрических компактах. Регулярность конечных борелевских мер на полных сепарабельных метрических пространствах

17. Непрерывные функции с компактным носителем плотны в пространстве $L^p(X,\mu)$ при $1 \leqslant p < \infty$, если X – полное сеперабельное локально компактное метрическое пространство, а μ – борелевская мера, конечная на компактах. Непрерывность сдвига в пространстве $L^p(\mathbb{R})$ при $1 \leqslant p < \infty$.

18. Полукольцо $\mathfrak{A} \times \mathfrak{B}$, σ-алгебра $\mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B}$. Измеримость проекций для множеств из $\mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B}$. Счетная аддитивность произведения мер на полукольце $\mathfrak{A} \times \mathfrak{B}$.

19. Принцип Кавальери

20. Теорема Тонелли

21. Теорема Фубини. Пример: вычисление интеграла Эйлера с помощью теоремы Тонелли

22. Сохранение измеримости по Лебегу при гладких отображениях.

23. Описание меры Лебега в терминах инвариантности отностительно сдвига. Изменение меры Лебега под действием линейных отображений

24. Взвешенный образ меры. Общая теорема о замене меры

25. Теорема о гладкой замене переменной в интеграле по мере Лебега. Пример: объем усеченного параболоида.

26. Определение заряда со значениями в $\mathbb{C}$, примеры. Непрерывность снизу и сверху для комплексных зарядов. Множества положительности, отрицательности, нуль-множества для заряда. Счетное объединение множеств положительности - множество положительности. Разложение Хана для вещественных зарядов.

27. Определение взаимно сингулярных мер, примеры. Разложение Жордана для вещественных и комплексных зарядов. Вариация комплексного заряда - конечная мера.

28. Полное линейное нормированное пространство зарядов на заданной σ-алгебре. Вычисление вариации для зарядов $\mu_+ - \mu_-$ и $f\,d\mu$.

29. Лемма о конечных мерах, не являющихся взаимно сингулярными. Заряд, абсолютно непрерывный и сингулярный относительно данной меры, равен нулю. Теорема Радона-Никодима

30. Теорема Витали для метрических пространств.

31. Максимальная функция Харди-Литлвуда, ее измеримость. Меры на метрических пространствах с условием удвоения. Примеры. Слабая оценка функции Харди-Литлвуда для мер с условием удвоения на сепарабельных метрических пространствах.

32. Предел $\lim \nu(B(x,r))/\mu(B(x,r))$ для взаимно сингулярных мер на полных сепарабельных метрических пространствах

33. Теорема о дифференцировании борелевского заряда по борелевской мере с условием удвоения на полном сепарабельном локально компактном метрическом пространстве. Точки Лебега суммируемой функции и измеримого множества

34. Носитель меры для борелевских мер на сепарабельных метрических пространствах. Неубывающая функция непрерывная слева порождает борелевскую меру конечную на ячейках. Борелевская мера конечная на ячейках порождает функцию, непрерывную слева.

35. Разложение сингулярной меры на чисто точечную и непрерывную часть. Пример сингулярной меры, не имеющей точечных нагрузок.

36. Теорема о существовании производной почти всюду для функций ограниченной вариации

37. Внешняя p-мера Хаусдорфа H^*_p, ее счетная полуаддитивность, определение меры H_p. Конечная аддитивность H^*_p на разделенных множествах.

38. Измеримость борелевских множеств относительно H^*_p.

39. Множества меры ноль относительно H^*_m, λ^*_m в $\mathbb{R}^m$. Совпадение алгебр $U_{H^*_m}$, $U_{\lambda^*_m}$ в $\mathbb{R}^m$. Пропорциональность H_m и λ_m в $\mathbb{R}^m$.

40. Изодиаметрическое неравенство. Лемма об исчерпывании шарами открытых множеств. Вычисление коэффициента пропорциональности между H_m и λ_m в $\mathbb{R}^m$. Определение k-мерной площади в $\mathbb{R}^m$

41. Изменение внешней меры Хаусдорфа при билипшицевом отображении. Матрица Грама гладкого отображения, положительность ее определителя

42. Теорема о площади борелевского подмножества простого гладко параметризованного многообразия.

43. Размерность Хаусдорфа. Пример: размерность и мера Хаусдорфа канторова множества.

44. Матрица Грама как матрица скалярных произведений частных производных параметризующего отображения. Длина гладкой кривой в $\mathbb{R}^m$. Площадь графика гладкого отображения из $\mathbb{R}^{m-1}$ в $\mathbb{R}$. Пример: площадь поверхности усеченного параболоида

45. Формула коплощади Кронрода-Федерера. Интеграл по шару в терминах интегралов по концентрическим сферам

46. Топологически гладкое многообразие класса C^n с краем. Размерность многообразия. Согласованные карты топологически гладкого многообразия с краем Пример: атласы $\mathbb{R}^2$ из двух согласованных и двух несогласованных карт.

47. Ориентирующий атлас. Ориентируемое гладкое многообразие. Ориентация многообразия. Количество ориентаций связного гладкого многообразия

48. Ориентируемость гладко параметризованных многообразий в $\mathbb{R}^m$ с непрерывным полем нормалей. Ориентируемость гладко параметризованных многообразий в $\mathbb{R}^m$, задаваемых уравнением $F(x) = 0$, где $F : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ – функция с ненулевым градиентом на множестве $\{x : F(x) = 0\}$.

49. Край многообразия размерности $k \geqslant 1$, корректность определения. Край гладкого многообразия размерности $k \geqslant 2$ - многообразие размерности $k-1$ той же гладкости. Край ориентируемого гладкого многообразия – ориентируемое гладкое многообразие. Согласованная ориентация для края гладкого многообразия

50. Гладкое отображение класса C^ℓ между гладкими многообразиями класса C^n. Лемма о гладком спуске с единицы. Разложение единицы на компактном подмножестве гладкого многообразия, подчиненное заданному атласу.

51. Полилинейная форма в конечномерном линейном пространстве. Тензорное произведение полилинейных форм. Общий вид полилинейных форм в терминах элементарных форм. Кососимметрические формы. Оператор альтернирования. Внешнее произведение форм. Пример: вычисление $e_1 \wedge e_2$ на паре векторов.

52. Внешнее произведение $e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_k} = \det()_{i_1,\ldots i_k}$. Формула $Alt(e_{i_1} \otimes \ldots \otimes e_{i_k}) = (k!)^{-1} \det()_{i_1,\ldots i_k}$. Общий вид кососимметрической формы в терминах форм $e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_k}$ Внешняя дифференциальная форма на подмножестве $\mathbb{R}^m$, ее гладкость. Пример: форма $2(x^2+y^2)dx \wedge dy + (2x+3z)dy \wedge dz$, вычисление ее значения в точке $(1,1,1)$ на векторах $(1,0,1)$, $(0,1,0)$.

53. Внешний дифференциал гладкой формы. Пример: внешний дифференциал формы $2(x^2+y^2)dx \wedge dy + (2x+3z)dy \wedge dz$

54. Касательный вектор и касательное пространство к топологически гладкому многообразию в заданной точке. Дифференциальная форма на ориентированном гладком многообразии. Внешний дифференциал формы на ориентированном гладком многообразии

55. Перенос формы с многообразия в карту. Сужение формы в $\mathbb{R}^n$ на гладко параметризованное многообразие. Перенос сужения формы порядка k на гладко параметризованном многообразии размерности k в карту. Пример: перенос формы $ydz \wedge dx$ со сферы в карту, задаваемую полярной заменой координат.

56. Интеграл дифференциальной формы по многообразию, корректность определения. Пример: интеграл $ydz \wedge dx$ по сфере минус множество $\{(x,y,z),\ x > 0\}$.

57. Теорема Стокса. Пример: применение теоремы Стокса для формы $ydz \wedge dx$ на единичной сфере.

58. Работа поля вдоль ориентированной кривой. Форма работы. Связь между криволинейными интегралами первого и второго рода.

59. Нормаль поверхности, порожденная параметризацией. Поток поля через ориентированную поверхность. Форма потока. Связь между поверхностными интегралами первого и второго рода.

60. Дивергенция поля. Формула Гаусса-Остроградского. Формула Грина.