

# Математический анализ

Р.В.Бессонов, весна 2020

1. Кусочно-гладкий путь, его ориентация. Сумма путей, обратный путь. Дифференциальные 1-формы с комплексными коэффициентами: определение, примеры. Дифференциал функции комплексного аргумента. Формы  $dz$  и  $d\bar{z}$ . Интеграл непрерывной дифференциальной формы по пути, основная оценка интеграла.
2. Точные и замкнутые дифференциальные формы. Критерий точности дифференциальных форм в терминах интегралов по кусочно-гладким путям.
3. Точные и замкнутые дифференциальные формы. Критерий замкнутости дифференциальных форм в терминах интегралов по кусочно-гладким путям. Точность замкнутых форм в односвязных областях.
4. Критерий замкнутости гладкой формы. Примеры: точность формы  $(a + bz) dz$  в  $\mathbb{C}$ , замкнутость формы  $dz/(z - a)$  в области  $\mathbb{C} \setminus \{a\}$ , вычисление интеграла от  $dz/(z - w)$  по окружности радиуса  $r > |a - w|$  с центром в точке  $a$ . Лемма об устранении особенности.
5. Теорема Коши-Гурса-Морера, часть 1 (существование производной влечет точность формы и разложение в ряд)
6. Лемма о первообразной точной формы  $g dz$ . Теорема Коши-Гурса-Морера, часть 2 (точность формы или разложение в ряд влечет существование производной)
7. Теорема Лиувилля. Основная теорема алгебры. Теорема единственности для аналитических функций
8. Замкнутость алгебры аналитических функций относительно равномерной сходимости на компактах. Поведение аналитической функции в окрестности ее нуля. Неравенство Лагранжа для аналитических функций. Аналитические функции с нулевой производной.
9. Отсутствие аналитического логарифма в области  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ . Аналитическая ветвь логарифма функции без нулей в односвязной области. Непрерывная ветвь аргумента функции без нулей в односвязной области. Главные ветви логарифма и аргумента. Степенная функция, отвечающая ветви логарифма. Пример: вычисление  $i^i$  для главной ветви логарифма.
10. Аналитичность и условия Коши-Римана. Открытость и принцип максимума для аналитических отображений.
11. Гармонические функции. Эквивалентные описания гармонических функций (представление  $u = \operatorname{Re} f$  влечет теорему о среднем,  $\Delta u = 0$  влечет представление  $u = \operatorname{Re} f$  в односвязной области).
12. Гармонические функции. Эквивалентные описания гармонических функций (теорема о среднем влечет гладкость  $u$  и равенство  $\Delta u = 0$ ).

13. Принцип максимума для гармонических функций. Ядро Пуассона – аппроксимативная единица. Построение гармонической функции в единичном круге с заданными непрерывными граничными значениями.
14. Ядро Пуассона и формула восстановления гармонической функции по граничным значениям в произвольном круге. Неравенство Гарнака и теорема Лиувилля для гармонических функций.
15. Стандартная область. Ориентация границы стандартной области против часовой стрелки. Интеграл по границе стандартной области. Теорема об обходе стандартной области вдоль гладкого участка границы.
16. Интегральная теорема Коши.
17. Интегральная теорема Коши для неограниченных областей. Теорема Монтеля.
18. Разложение в ряд Лорана. Поведение аналитической функции в окрестности устранимой особой точки
19. Виды изолированных особых точек аналитических функций и их классификация в терминах рядов Лорана. Теорема Сохоцкого.
20. Теорема Коши о вычетах. Вычет в бесконечности. Сумма вычетов аналитической функции с конечным числом особых точек.
21. Лемма о полувычете. Лемма Жордана. Вычисление интеграла Дирихле.
22. Ветвь аргумента вдоль пути: определение, существование, степень неединственности, интегральная формула для изменения аргумента. Примеры.
23. Принцип аргумента и Теорема Руше. Пример.
24. Теорема Гурвица. Теорема о сходимости однолистных (инъективных) аналитических функций.
25. Аналитическое продолжение. Лемма о склеивании. Описание вещественно-аналитических функций в терминах аналитического продолжения и в терминах производных
26. Аналитическое продолжение  $\Gamma$ -функции Эйлера
27. Принцип симметрии. Аналитическое продолжение вдоль кривой. Аналитическое продолжение логарифма функции в многосвязной области
28. Риманова поверхность. Комплексная проективная прямая и универсальная накрывающая области как примеры римановых поверхностей
29. Теорема о монодромии. Аналитическое отображение между двумя римановыми поверхностями. Логарифма аналитической функции на универсальной накрывающей многосвязной области
30. Римановы поверхности функций  $\log z$ ,  $\sqrt[n]{z}$ ,  $\sqrt{1-z^2}$ . Примеры вычисления значений этих функций на соответствующих римановых поверхностях. Риманова поверхность произвольной аналитической функции

31. Преобразования Мебиуса как отображения на комплексной проективной прямой, их свойства.
32. Классическая и инвариантная форма леммы Шварца. Общий вид автоморфизмов единичного круга
33. Определение сходимости бесконечного произведения аналитических функций. Условие Бляшке. Нули ограниченных аналитических функций в единичном круге
34. Теорема Римана
35. Конформная эквивалентность  $\mathbb{C}$ . Конформные отображения  $\mathbb{C}$  на  $\mathbb{C}$ . Степень неединственности конформного отображения в теореме Римана.
36. Формулировка теоремы Каратеодори. Лемма о длинах и площадях, лемма о непрерывном продолжении. Лемма об аналитической функции, постоянной на дуге окружности. Разрешимость задачи Дирихле для жордановых областей.
37. Теорема Каратеодори о продолжении до гомеоморфизма.
38. Теорема о модулярной функции
39. Теорема Пикара, версия для целых и мероморфных функций. Пример ее применения. Теорема Кёбе-Пуанкаре.
40. Принципы Фрагмена-Линделефа для угла и полосы. Теорема Адамара о трех прямых.
41. Произведение Вейерштрасса, его сходимость. Теоремы Вейерштрасса и Миттаг-Леффлера
42. Порядок и тип целой функции в терминах ее коэффициентов разложения в ряд Тейлора
43. Формула Йенсена. Считаящая функция нулей и ее связь с формулой Йенсена
44. Нули целых функций конечного порядка.
45. Теорема Адамара о факторизации целых функций конечного порядка.
46. Разложения в произведения для функций  $\sin \pi z$  и  $\Gamma^{-1}$ . Формула дополнения для  $\Gamma$ -функции.
47. Интеграл Пуассона комплексного заряда на единичной окружности. Представимость гармонических функций интегралом Пуассона.
48. Радиальные граничные значения гармонических функций в единичном круге. Угловые граничные значения интегралов Пуассона сингулярных мер.
49. Угловые граничные значения гармонических функций в единичном круге.
50. Угловые граничные значения произведений Бляшке и степенных рядов с квадратично-суммируемыми коэффициентами.