Математический Анализ
Семестр II, весна 2019
Р. В. Бессонов

1. Линейные пространства, примеры. Теорема об эквивалентности норм на конечномерном линейном пространстве. Норма на пространстве линейных операторов $L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$. Ядро и образ линейного оператора. Биективность оператора и тривиальность его ядра. Липшицевость и билипшицевость для линейных отображений.

2. Оценка $\|AB\| \leqslant \|A\|\|B\|$ для линейных операторов. Открытость множества обратимых операторов в $L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m)$. Матрица как линейный оператор. Вычисление элементов матрицы заданного линейного отображения в стандартном базисе.

3. Дифференцируемость и дифференциал функций нескольких переменных. Дифференцируемость функций скалярного аргумента в новом и старом смысле. Линейность дифференциала. Дифференциал линейного отображения. Дифференциал суперпозиции отображений. Дифференцируемость отображения равносильна дифференцируемости его координатных функций.

4. Производная по направлению, частные производные: определения. Если отображение дифференцируемо, то у него существуют производные по каждому направлению. Существование частных производных и дифференцируемость отображения.

5. Матрица дифференциала отображения совпадает с матрицей Якоби этого отображения. Градиент. Выражение производной по направлению через градиент. Производная по направлению максимальна в направлении градиента. Если функция дифференцируема в точке локального экстремума, то градиент в ней равен нулю.

6. Пример векторно-значной функции, для которой прямой аналог скалярной теоремы Лагранжа не верен. Теорема Лагранжа для скалярно-значных функций векторного аргумента. Неравенство Лагранжа для векторно-значных функций векторного аргумента. Если дифференциал дифференцируемого отображения всюду равен нулю, то оно постоянно.

7. Достаточное условие совпадения частных производных высшего порядка.

8. Формула Тейлора с остатком в форме Лагранжа и в форме Пеано.

9. Положительный оператор и оценка снизу на его квадратичную форму в случае тривиальности ядра. Критерий Сильвестра (формулировка). Необходимые, достаточные условия локальных экстремумов.

10. Теорема о локальной билипшицевости отображений с невырожденным дифференциалом.

11. Лемма о сильных сжатиях в полных метрических пространствах. Лемма об отображении $x \mapsto x + [d_a f]^{-1}(y - f(x))$ в окрестности точки a.

12. Теорема об открытости отображений с невырожденным дифференциалом.

13. Теорема об обратном отображении, формула дифференциала обратного отображения. Отображение $(x, y) \mapsto (e^x \cos y, e^x \sin y)$.

14. Теорема о неявном отображении: формулировка и примеры (нахождение точек (x_0, y_0), в окрестности которых уравнения $x^2 + y^2 = 1$, $(x^2 + y^2)^2 = 2(x^2 - y^2)$ имеют единственное решение $(x, y(x))$, гладко зависящее от координаты x; поведение простых нулей многочленов при малом изменении коэффициентов).

15. Доказательство теоремы о неявном отображении.

16. Определение многообразия. Атлас, карты, локальные и глобальная параметризации. Простое k-мерное многообразие. Топологически гладкие многообразия класса C^r. Примеры: окружность и квадрат – топологически гладкие многообразия, лемниската - не многообразие.

17. Гладко параметризованные многообразия в $\mathbb{R}^n$. Два определения, их равносильность. Локальная билипшицевость локальных параметризаций. Аналитически гладкие многообразия являются топологически гладкими.

18. Касательный вектор в точке гладко параметризованного многообразия. Касательное пространство в точке гладко параметризованного многообразия совпадает с образом дифференциала, его размерность совпадает с размерностью многообразия.

19. Аффинное касательное пространство, его описание в геометрических терминах.

20. Теорема о множестве уровня гладкого отображения ранга $n - k$. Примеры: эллипс $x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 = 1$ – многообразие размерности 2 в $\mathbb{R}^3$, пересечение сферы и плоскости $x + y + z = 0$ – многообразие размерности 1 в $\mathbb{R}^3$.

21. Касательное пространство в терминах градиентов функций, задающих многообразие как множество уровня. Пример: касательная плоскость к двумерной сфере в трехмерном пространстве.

22. Локальное представление многообразия в виде графика отображения.

23. Определение условного локального экстремума при заданных уравнениях связи, его связь с экстремумом функции на многообразии. Необходимое условие условного экстремума в терминах градиентов функций из уравнений связи и в терминах функции Лагранжа.

24. Максимум и минимум квадратичной формы на сфере с помощью функции Лагранжа.

25. Достаточное условие существования условного экстремума в терминах функции Лагранжа.

26. Выпуклые функции на выпуклых подмножествах $\mathbb{R}^n$. Надграфик выпуклой функции – выпуклое множество. Неравенство Йенсена (формулировка). Примеры выпуклых функций нескольких переменных. Функция из $C^2(\Omega)$ выпукла тогда и только тогда, когда Гессиан – неотрицательный оператор в каждой точке Ω.

27. Линейные нормированные пространства, пространство $L(X,Y)$ и норма на нем. Дифференцируемость отображений между линейными нормированными пространствами. Единственность дифференциала. Определение дифференциала порядка n. Пространство полилинейных операторов $\mathcal{T}^n(X,Y)$ порядка n. Полилинейные функции и формы, примеры.

28. Теорема: пространство $L(X,L(X,Y))$ изометрически изоморфно $\mathcal{T}^2(X,Y)$. Аналог последнего утверждения для старших порядков, дифференциал порядка n как полилинейный оператор из $\mathcal{T}^n(X,Y)$.

29. Формы $(dx)^\alpha \in \mathcal{T}^n(X,\mathbb{R})$ для мультииндексов α, $|\alpha|=n$. Доказательство формулы $d_x^n f = \sum_{|\alpha|=n} \frac{\partial^\alpha f(x)}{\partial x^\alpha}(dx)^\alpha$ в случае $n=1$ и $n=2$.

30. Полное метрическое пространство. Предел отображения между двумя хаусдорфовыми т.п. Равномерный предел отображения между двумя хаусдорфовыми т.п. Критерий Коши, общая версия. Критерий Коши для равномерной сходимости, общая версия.

31. Теорема о перестановках предельных переходов, общая версия.

32. Теорема Стокса-Зейделя, общая версия. Теорема о дифференцируемости предельной функции, общая версия.

33. Непрерывность собственного интеграла, непрерывно зависящего от параметра. Дифференцируемость собственного интеграла, гладко зависящего от параметра.

34. Дифференцирование собственного интеграла по нижнему и верхнему пределу интегрирования, зависящего от параметра. Совпадение собственных повторных интегралов от непрерывных функций.

35. Равномерная сходимость несобственного интеграла, зависящего от параметра: определение, критерий Коши, признак Вейерштрасса.

36. Признак Абеля-Дирихле равномерной сходимости. Предельный переход под знаком интеграла для несобственных интегралов.

37. Непрерывная зависимость от параметра несобственного равномерно сходящегося интеграла. Теорема Абеля.

38. Теорема о дифференцировании несобственного интеграла по параметру. Вычисление интеграла $\int_{\mathbb{R}} \frac{\sin x}{x}\,dx = \pi$

39. Теорема о интегрировании несобственного интеграла по параметру.

40. Функции Эйлера $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\,dt$, $B(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,dt$: корректность определения, дифференцируемость, формулы для производных и их корректность. Выпуклость Γ–функции.

41. Неравенства Юнга и Гёльдера. Логарифмическая выпуклость Γ–функции.

42. Теорема Бора-Моллерупа.

43. Симметричность B–функции относительно своих аргументов. Формула понижения: $B(x+1,y) = \frac{x}{x+y}B(x,y)$. Тождество $B(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$.

44. Аппроксимативная единица. Примеры. Теорема об аппроксимативной единице.

45. Теорема Стоуна-Вейерштрасса: простой случай.

46. Алгебры Стоуна. Примеры. Теорема Стоуна-Вейерштрасса: общий случай.

47. Теорема Арцела-Асколи. Секвенциальная компактность множества функций на $\mathbb{R}^n$ с равномерно ограниченным дифференциалом в топологии равномерной сходимости на компактах.

48. Теорема Дини о монотонной сходимости. Равномерная сходимость функциональных рядов с неотрицательными членами.

49. Теорема Хелли о сходимости монотонных функций.

50. Методы усреднения Чезаро и Абеля, соответствующие им методы суммирования. Усреднение по Чезаро и Абелю последовательности $\{(-1)^n\}_{n\geqslant 0}$, сумма по Абелю последовательности $\{(-1)^k k\}$. Методы усреднения, заданные матрицей. Матрица метода Чезаро.

51. Теорема Теплица о регулярных методах, заданных неотрицательными коэффициентами. Регулярность методов Чезаро и Абеля.

52. Равенство $\sum a_k \cdot \sum b_j = \sum a_k b_j$ для сходящихся рядов при суммировании по Коши. Теорема Фробениуса.

53. Тауберова теорема Таубера.

54. Тауберова теорема Харди.

55. Тауберова теорема Харди-Литлвуда, метод Караматы.

56. Определение относительно плотного подмножества $\mathbb{R}$, ε-почти-периода, равномерно почти-периодической функции со значениями в множестве комплексных чисел. Свойства: р.п.п. функции равномерно ограничены и равномерно непрерывны.

57. Теорема Бора об описании р.п.п. функций в терминах компактности сдвигов.

58. Суперпозиция непрерывной функции на $\mathbb{R}$ и р.п.п. функции есть р.п.п. функция. Равномерный предел р.п.п. функций есть р.п.п. функция. Линейная комбинация р.п.п. функций есть р.п.п. функция. Произведение р.п.п. функций есть р.п.п. функция.

59. Равномерная почти периодичность функций $\sum_{k=1}^n a_k e^{i\lambda_k x}$. Критерий периодичности таких функций.

60. Теорема о существовании среднего значения для р.п.п. функций.