Функциональный анализ

Вопросы к экзамену

1. Теорема Хана-Банаха, вещественная форма.
2. Теорема Хана-Банаха, комплексная форма. Банахов предел.
3. Линейное топологическое пространство, пространство Фреше, линейное нормированное пространство, банахово пространство – определения и примеры. Разделяющее семейство полунорм и метрика, порожденная им. Ограниченное множество в линейном топологическом пространстве. Теорема: $C(\Omega)$ - пространство Фреше, но не нормируемо.
4. Теорема Банаха-Штейнгауза о равномерной непрерывности.
5. Непрерывность и ограниченность линейных операторов, различные способы определения операторной нормы, теорема Банаха-Штейнгауза о равномерной ограниченности, теорема Банаха-Штейнгауза о поточечной сходимости. Примеры применения этих теорем. Продолжение оператора с плотного подмножества. Предел равномерно ограниченной последовательности операторов, сходящейся на плотном подмножестве.
6. Теорема об открытом отображении.
7. Теорема о линейной непрерывной биекции. Теорема о замкнутом графике. Полнота одного пространства относительно двух разных норм.
8. Полнота линейного нормированного пространства и абсолютная сходимость рядов. Примеры банаховых пространств. Доказательство полноты пространства $M(K)$ для хаусдорфова компакта K. Пополнение линейного нормированного пространства.
9. Пространство ограниченных операторов, сопряженное пространство к линейному нормированному пространству, их полнота. Теорема Хана-Банаха для линейных нормированных пространств. Теорема о достаточном числе функционалов.
10. Неограниченность функционала $f \mapsto f'(0)$ на $C^1(-1,1)$ с sup-нормой. Базис Гамеля: определение и существование. Существование неограниченного оператора, заданного на всем банаховом пространстве.
11. Конечномерные линейные нормированные пространства: эквивалентность норм, полнота конечномерных банаховых пространств, ограниченность линейных операторов, описание конечномерных линейных нормированных пространств в терминах компактности.
12. Скалярное произведение, его линейность и антилинейность, непрерывность. Неравенство КБШ, норма, порожденная скалярным произведением, определение гильбертова простанства, примеры. Тождество параллелограмма, теорема о метрической проекции.

13. Разность элемента и его наилучшего приближения до подпространства гильбертова пространства ортогональна этому подпространству. Существование ортогонального элемента к собственному подпространству. Ортогональное дополнение до подпространства. Сумма двух ортогональных подпространств гильбертова пространства. Сопряженный оператор и разложение $H = \operatorname{Ker} T \oplus \overline{\operatorname{Ran} T^*}$. Ортогональный проектор на подпространство и его описание в терминах операторных тождеств.

14. Ортогональная, ортонормированная, полная, минимальная системы векторов, ортонормированный базис. Пример: система $\{z^n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ на окружности. Сходимость рядов с ортогональными слагаемыми. Коэффициенты Фурье относительно данной ортонормированной системы, неравенство Бесселя. Ряд Фурье относительно ортонормированной системы, его сходимость в случае полноты системы. Равенство Парсеваля.

15. Ортогонализация Грама-Шмидта. Сепарабельность и существование счетного ортонормированного базиса. Сепарабельные гильбертовы пространства унитарно изоморфны. Существование сопряженного к оператору в гильбертовом пространстве. Норма линейного оператора как $\sup_{\|x\|\leqslant 1,\ \|y\|\leqslant 1} |(Tx, y)|$. Общий вид операторов ранга 1 в гильбертовом пространстве.

16. Функционал в линейном пространстве с точностью до скалярного множителя определяется своим ядром. Теорема Рисса о линейных непрерывных функционалах в гильбертовом пространстве. Существование сопряженного оператора к ограниченному линейному оператору в гильбертовом пространстве.

17. Сопряженное пространство к пространству $L^p(\mu)$, $1 \leqslant p < \infty$.

18. Формулировка теоремы Рисса-Маркова-Какутани. Определения всех объектов, входящих в формулировку. Схема доказательства теоремы. Доказательство сведения общей формулировки к существованию неотрицательной меры, задающей (вещественный) неотрицательный непрерывный функционал.

19. Формулировка теоремы Рисса-Маркова-Какутани. Определения всех объектов, входящих в формулировку. Схема доказательства теоремы. Построение внешней меры и проверка ее счетной аддитивности и регулярности на σ-алгебре борелевских множеств.

20. Формулировка теоремы Рисса-Маркова-Какутани. Определения всех объектов, входящих в формулировку. Схема доказательства теоремы. Последняя часть доказательства.

21. Тотальное семейство функционалов на линейном пространстве. Тотальное семейство задает топологию линейного топологического пространства. Определение сильной, слабой, $*$-слабой топологии. Изометрическое вложение $X \subset X^{**}$ для банаховых пространств. Рефлексивность. Для банахова пространства X семейства X, X^{**} функционалов на X^* тотальны. Формулировка теоремы Банаха-Алаоглу, $*$-слабая компактность замкнутого единичного шара в пространстве, обладающем предсопряженным.

22. Тихоновское произведение топологических пространств. Формулировка теоремы Тихонова о произведении компактных хаусдорфовых пространств. Доказательство теоремы Банаха-Алаоглу.

23. Метризуемость $*$-слабой топологии на единичном шаре в пространстве, сопряженном к сепарабельному банахову пространству. Секвенциальная компактность $*$-слабой топологии единичного шара в пространстве, сопряженном к сепарабельному банахову пространству, $*$-слабая замкнутость в терминах поточечной сходимости. Примеры: *-слабая секвенциальная компактность шаров в $L^p(\mu)$, $M(K)$, гильбертовом пространстве. Координатные функционалы на ℓ^∞. Слабая компактность шара в рефлексивном пространстве.

24. Абсолютно выпуклое множество, поглощающее множество, примеры. Функционал Минковского, его субаддитивность и положительная однородность, строгое неравенство для открытых множеств. Локально выпуклые линейные топологические пространства, примеры. Основная теорема отделимости в локально выпуклых линейных топологических пространствах, пункт (А).

25. Основная теорема отделимости в локально выпуклых линейных топологических пространствах, пункт (Б). Для локально выпуклого линейного топологического пространства X пространство его непрерывных линейных функционалов X' тотально. Если точка x локально выпуклого линейного топологического пространства X не принадлежит подпространству $M \subset X$, то $\phi(x) = 1$ для некоторого $\phi \in X'$, исчезающего на M. Слабое и сильное замыкание выпуклого множества в локально выпуклом линейном топологическом пространстве совпадают.

26. Теорема Крейна-Мильмана. Отсутствие предсопряженного у пространства L^1

27. Банаховы алгебры: определения и примеры. Непрерывность умножения. Обратимость элемента, близкого к единичному и открытость множества обратимых элементов

28. Спектр, резольвентное множество. Примеры. Теорема о непустоте спектра.

29. Теорема о спектральном радиусе. Спектр оператора Вольтерра. Теорема Гельфанда-Мазура

30. Взаимно-однозначное соответствие между мультипликативными функционалами и максимальными идеалами. Обратимость элемента в терминах мультипликативных функционалов и максимальных идеалов. Теорема Винера. Разрешимость уравнения Безу в диск-алгебре.

31. Теорема Стоуна-Вейерштрасса, вещественный и комплексный случай.

32. Инволюции и C^*-алгебры. Нормальные, самосопряженные и унитарные элементы. Примеры. Спектральный радиус нормального элемента равен его норме. Пространство максимальных идеалов – хаусдорфов компакт.

33. Теорема Гельфанда-Наймарка

34. Теорема о $C(\sigma)$-функциональном исчислении для алгебр, порожденных нормальным элементом.

35. Спектральная теорема для циклических нормальных операторов. Спектр циклического нормального оператора и носитель его спектральной меры.

36. Приводящее подпространство. Спектральная теорема в терминах оператора умножения на независимую переменную

37. Спектр нормального оператора и спектры мер в его разложении. Спектр унитарного и самосопряженного оператора. Критерий унитарности для нормального оператора. Спектром нормального оператора может быть любое компактное подмножество $\mathbb{C}$.

38. Проблема моментов для мер на окружности

39. Разложение симметричной матрицы в сумму проекторов (формулировка). Разложение единицы. Спектральная теорема в терминах разложения единицы, единственность разложения единицы

40. Теорема о L^∞-функциональном исчислении для нормальных операторов. Вычисление нормы резольвенты для нормального оператора

41. Неотрицательный квадратный корень из неотрицательного оператора, его единственность. Частичная изометрия, ее описание в терминах операторного тождества. Полярное представление ограниченного оператора

42. Компактные операторы: определение, переформулировка в терминах подпоследовательностей, примеры (конечномерные операторы, описание единичных компактных операторов), свойства (замкнутость по норме, двусторонний идеал). Оператор в гильбертовом пространстве компактен тогда и только тогда, когда переводит слабо сходящиеся последовательности в сильно сходящиеся. Компактность гильбертова сопряженного оператора

43. Банахов сопряженный оператор, его свойства (линейность сопряжения, сопряженный к произведению, обратимость сопряженного, спектр сопряженного, второй сопряженный) Теорема Шаудера о компактности сопряженного оператора

44. Лемма о ядре и образе компактного возмущения единичного оператора. Теорема Фредгольма об обратимости компактных возмущений единичного оператора.

45. Обратимость компактных возмущений обратимых операторов. Альтернатива Фредгольма. Пример: разрешимость уравнения $f - \int_0^1 e^{t-s} f(t)\, dt = g$ в $L^2[0,1]$.

46. Теорема о спектре компактного оператора

47. Лемма об интерполяции. Теорема об индексе

48. Спектральная теорема для самосопряженных компактных операторов. Сингулярные числа компактного оператора. Разложение Гильберта-Шмидта для компактных операторов

49. Теорема о минимаксе. Сингулярные числа компактного оператора и расстояние до операторов фиксированного ранга. Неравенство $s_k(T_1T_2T_3) \leqslant \|T_1\|\|T_3\| s_k(T_2)$.

50. Класс операторов со следом, его описание в терминах сумм $\sum |(Th_k, g_k)|$. Общий вид оператора со следом в терминах операторов ранга 1. Норма в классе операторов со следом. S_1 – банахово пространство.

51. След оператора из S_1, корректность его задания, линейность и непрерывность. Сопряженное пространство к пространству S_∞.

52. Сопряженное пространство к пространству S_1. Секвенциальная компактность шара в слабой операторной топологии. Независимость следа произведения операторов от порядка сомножителей.

53. Операторы Гильберта-Шмидта и их сингулярные числа.

Литература

[1] Н. Данфорд, Дж. Шварц, *Линейные операторы, общая теория.* М. Издательство иностранной литературы, 1962.
[2] У. Рудин, *Функциональный анализ.* М. Мир, 1975 [3] М.Ш.Бирман, М.З. Соломяк. Спекральная теория самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве. Л. Издательство ленинградского университета, 1980.