

Санкт-Петербургский государственный университет

**РАБОЧАЯ ПРОГРАММА
УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ**

Выпуклые множества (осн курс), тр 5 сем
Convex Sets

Язык(и) обучения

русский

Трудоемкость в зачетных единицах: 3

Регистрационный номер рабочей программы: 045037

Раздел 1. Характеристики учебных занятий

1.1. Цели и задачи учебных занятий

Сообщение сведений о выпуклых множествах в объеме, необходимом для общего развития и изучения смежных дисциплин физико-математического цикла. Усвоение основных идей, понятий и фактов теории выпуклых множеств.

1.2. Требования подготовленности обучающегося к освоению содержания учебных занятий (пререквизиты)

Владение курсом «Геометрия и топология».

1.3. Перечень результатов обучения (learning outcomes)

Обучающийся должен овладеть теоретическим материалом в объеме, предусмотренном программой, уметь применять полученные знания при решении теоретических и прикладных задач, на основе анализа освоенных разделов: полиэдральные множества и линейная оптимизация, аналитические свойства выпуклых множеств, смешанные объемы и геометрические неравенства; уяснить логику и технику построения математической теории как фундамента самостоятельных научных исследований

1.4. Перечень и объём активных и интерактивных форм учебных занятий

Промежуточная аттестация (экзамен) 4 часа.

Раздел 2. Организация, структура и содержание учебных занятий

2.1. Организация учебных занятий

2.1.1 Основной курс

Трудоёмкость, объёмы учебной работы и наполняемость групп обучающихся																				
Код модуля в составе дисциплины, практики и т.п.	Контактная работа обучающихся с преподавателем											Самостоятельная работа				ср	к	вн	до	ём
	лекции	семинары	консультации	практические занятия	лабораторные работы	контрольные работы	коллоквиумы	текущий контроль	промежуточная аттестация	итоговая аттестация	под руководством преподавателя	в присутствии преподавателя	сам. раб. с использованием методических материалов	текущий контроль (сам.раб.)	промежуточная аттестация (сам.раб.)					
ОСНОВНАЯ ТРАЕКТОРИЯ																				
очная форма обучения																				
Семестр 5	32		2					2				44		28		4	3			
	2-50		2-50					2-50				1-1		1-1						
ИТОГО	32		2					2				44		28		4	3			

Виды, формы и сроки текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации						
Код модуля в составе дисциплины, практики и т.п.	Формы текущего контроля успеваемости		Виды промежуточной аттестации		Виды итоговой аттестации (только для программ итоговой аттестации и дополнительных образовательных программ)	
	Формы	Сроки	Виды	Сроки	Виды	Сроки
ОСНОВНАЯ ТРАЕКТОРИЯ						
очная форма обучения						
Семестр 5			экзамен, устно, традиционная форма	по графику промежуточной аттестации, по графику промежуточной аттестации		

2.2. Структура и содержание учебных занятий

Период обучения (модуль): Семестр 5

№ п/п	Наименование темы (раздела, части)	Вид учебных занятий	Количество часов
1	Полиэдральные множества и линейная оптимизация	Лекции	8
		практические занятия	
		в присутствии преподавателя	
		по методическим материалам	14
2	Аналитические свойства выпуклых множеств	Лекции	10
		практические занятия	
		в присутствии преподавателя	
		по методическим материалам	16
3	Смешанные объемы и геометрические неравенства	Лекции	14
		практические занятия	
		в присутствии преподавателя	
		по методическим материалам	16
4	Экзамен	промежуточная аттестация (ауд)	2
		промежуточная аттестация (с.р.)	28

Раздел 1: Полиэдральные множества и линейная оптимизация

Выпуклые полиэдральные множества, минимальное представление системой линейных неравенств. Касательный и асимптотический конус выпуклого полиэдрального множества.

Двойственность выпуклых конусов. Лемма Фаркаша и ее варианты.

Двойственность в задачах линейного программирования. Примеры задач линейного программирования.

Экстремальные подмножества. Грани выпуклых полиэдров.

Раздел 2: Аналитические свойства выпуклых множеств

Выпуклые и вогнутые функции, выпуклость и субаддитивность. Субдифференциал, непрерывность выпуклых функций. Характеристическая функция Минковского выпуклого множества, задание выпуклого тела характеристической функцией.

Опорная функция, задание выпуклого компакта опорной функцией. Двойственность опорных и характеристических функций, связь с двойственными нормами.

Расстояние по Хаусдорфу между выпуклыми компактами. Выражение через опорные функции, приближение многогранниками, непрерывность основных функционалов. Теорема Бляшке о компактности.

Раздел 3: Смешанные объемы и геометрические неравенства

Формулы для объема многогранника и их приложения. Многогранники с заданными нормальными векторами и площадями граней, меры площадей выпуклых поверхностей.

Свойства сложения по Минковскому. Полиномиальный вид объема линейной комбинации выпуклых множеств. Смешанные объемы, их алгебраические свойства, непрерывность и аддитивность. Формула Минковского и монотонность смешанных объемов.

Площади проекций, площадь поверхности как смешанные объемы. Проекционная функция, ее выпуклость, тело проекций. Интегральные поперечные меры.

Неравенство Брунна-Минковского. Центральная симметризация и неравенство Бибербаха. Изопериметрическое неравенство.

Неравенства Минковского для смешанных объемов. Неравенство Александра-Фенхеля.

Объемы и площади в нормированных пространствах. Неравенство Буземана и выпуклость тела сечений. Изопериметры в нормированных пространствах. Выпуклость площади и минимальность плоскостей.

Темы для дополнительных заданий: эллипсоиды Джона и Лёвнера, компакт Банаха-Мазура, симметризация по Штейнеру. неравенство Бляшке-Сантало, неравенство Малера и гипотеза Малера.

Раздел 3. Обеспечение учебных занятий

3.1. Методическое обеспечение

3.1.1 Методические указания по освоению дисциплины

Посещение лекций

3.1.2 Методическое обеспечение самостоятельной работы

Основная и дополнительная литература

3.1.3 Методика проведения текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации и критерии оценивания

Методика проведения экзамена

Экзамен проводится в устной форме. Билет состоит из двух вопросов. Время подготовки ответа на вопросы билета составляет 60 минут.

Использование конспектов и учебников, а также электронных устройств хранения, обработки или передачи информации при подготовке и ответе на вопросы экзамена категорически запрещено. В случае обнаружения факта использования недозволенных материалов (устройств) составляется акт и студент удаляется с экзамена. После ответа на вопросы билета преподаватель задает несколько дополнительных вопросов, на основании оценки ответов на которые итоговая оценка по предмету может быть повышена или понижена.

Критерии выставления оценок

Оценка «отлично» ставится за полностью раскрытый теоретический материал и правильные ответы на дополнительные вопросы преподавателя. В болонской шкале оценка может быть скорректирована в ту или иную сторону с учетом малозначительных погрешностей изложения или, напротив, углубленного изложения материала.

Оценка «хорошо» ставится за изложенный теоретический материал билета (возможно с помощью наводящих подсказок преподавателя).

Оценка «удовлетворительно» ставится за знание основных вопросов по каждой теме.

Оценка «неудовлетворительно» выставляется, если не выполняются условия для получения оценок «отлично», «хорошо» и «удовлетворительно».

3.1.4 Методические материалы для проведения текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации (контрольно-измерительные материалы, оценочные средства)

Период обучения (модуль): **Семестр 5**

Список вопросов к экзамену:

1. Минимальное представление системой линейных неравенств.
2. Касательные и асимптотические конусы.
3. Двойственность выпуклых конусов. Лемма Фаркаша
4. Двойственность в задачах линейного программирования.
5. Примеры задач линейного программирования.
6. Экстремальные подмножества и грани выпуклых полиэдров.

7. Выпуклые и вогнутые функции, выпуклость и субаддитивность.
8. Субдифференциал, непрерывность выпуклых функций.
9. Характеристическая функция выпуклого множества.
10. Опорная функция. Задание выпуклого компакта опорной функцией.
11. Расстояние по Хаусдорфу между выпуклыми компактами.
12. Пространство выпуклых компактов, непрерывность основных функционалов.
13. Теорема Бляшке о компактности.
14. Объем многогранника, формула суммарного давления.
15. Многогранники с заданными нормальными векторами и площадями граней.
16. Полиномиальный вид объема линейной комбинации выпуклых множеств.
17. Смешанные объемы, их алгебраические свойства, непрерывность и аддитивность.
18. Формула Минковского и монотонность смешанных объемов.
19. Площади проекций и площадь поверхности как смешанные объемы.
20. Проекционная функция и тело проекций.
21. Интегральные поперечные меры.
22. Неравенство Брунна-Минковского.
23. Неравенство Бибербаха, изопериметрическое неравенство.
24. Неравенства Минковского и Александра-Фенхеля.
25. Неравенство Буземана и выпуклость тела сечений.
26. Изопериметры в нормированных пространствах.

3.1.5 Методические материалы для оценки обучающимися содержания и качества учебного процесса

3.2. Кадровое обеспечение

3.2.1 Образование и (или) квалификация штатных преподавателей и иных лиц, допущенных к проведению учебных занятий

К чтению лекций должны привлекаться преподаватели, имеющие ученую степень доктора или кандидата наук (в том числе степень PhD, прошедшую установленную процедуру признания и установления эквивалентности) и/или ученое звание профессора или доцента.

3.2.2 Обеспечение учебно-вспомогательным и (или) иным персоналом

не требуется

3.3. Материально-техническое обеспечение

3.3.1 Характеристики аудиторий (помещений, мест) для проведения занятий

Стандартно оборудованные лекционные аудитории, должны вмещать поток в соответствии со списком студентов

3.3.2 Характеристики аудиторного оборудования, в том числе неспециализированного компьютерного оборудования и программного обеспечения общего пользования

доска для письма мелом или фломастером

3.3.3 Характеристики специализированного оборудования

не требуется

3.3.4 Характеристики специализированного программного обеспечения

не требуется

3.3.5 Перечень и объёмы требуемых расходных материалов

Мел — не менее 1 куска на час лекционных занятий, фломастеры для доски, губка

3.4. Информационное обеспечение

3.4.1 Список обязательной литературы

1. Лейхтвейс К. Выпуклые множества. М.,Наука, 1985.
2. Бурого Ю.Д., Залгаллер В.А. Геометрические неравенства. Л.,Наука, 1980.

3.4.2 Список дополнительной литературы

1. Gruber P.M. *Convex and Discrete Geometry*. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, 336. Springer, Berlin, 2007.
2. Thompson A.C. *Minkowski Geometry*. Encyclopedia of Mathematics and its Applications, 63. Cambridge University Press, Cambridge, 1996.

3.4.3 Перечень иных информационных источников

Раздел 4. Разработчики программы

Иванов Сергей Владимирович, доктор физ.-мат. наук, главный научный сотрудник ПОМИ РАН, svivanov@pdmi.ras.ru