Санкт-Петербургский государственный университет

Р А Б О Ч А Я   П Р О Г Р А М М А
УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ

Алгебра
Algebra

Язык(и) обучения

русский

Трудоемкость в зачетных единицах: 23

Регистрационный номер рабочей программы: 050101

Раздел 1. Характеристики учебных занятий

1.1. Цели и задачи учебных занятий

Сообщение сведений об алгебре в объеме, необходимом для общего развития и изучения смежных дисциплин физико-математического цикла. Усвоение основных идей, понятий и фактов высшей алгебры.

1.2. Требования подготовленности обучающегося к освоению содержания учебных занятий (пререквизиты)

Не предусмотрены.

1.3. Перечень результатов обучения (learning outcomes)

Обучающийся должен овладеть теоретическим материалом в объеме, предусмотренном программой, уметь применять полученные знания при решении теоретических и прикладных задач, на основе анализа освоенных разделов: элементарная теория колец и арифметика, многочлены и поля, линейная алгебра, теория групп, квадратичные и эрмитовы формы, представления конечных групп, полилинейная алгебра, начала теории категорий, начала гомологической алгебры, числовые кольца.

1.4. Перечень и объём активных и интерактивных форм учебных занятий

практические занятия 128 часов, контрольные работы 8 часов, коллоквиумы 8 часов, промежуточная аттестация (зачеты и экзамены) 16 часов

Раздел 2. Организация, структура и содержание учебных занятий

2.1. Организация учебных занятий

2.1.1 Основной курс

Трудоёмкость, объёмы учебной работы и наполняемость групп обучающихся																		
Код модуля в составе дисциплины, практики и т.п.	Контактная работа обучающихся с преподавателем												Самостоятельная работа				Объём активных и интерактивных форм учебных занятий	Трудоёмкость
	лекции	семинары	консультации	практические занятия	лабораторные работы	контрольные работы	коллоквиумы	текущий контроль	промежуточная аттестация	итоговая аттестация	под руководством преподавателя	в присутствии преподавателя	сам. раб. с использованием методических материалов	текущий контроль (сам.раб.)	промежуточная аттестация (сам.раб.)	итоговая аттестация (сам.раб.)		
ОСНОВНАЯ ТРАЕКТОРИЯ																		
очная форма обучения																		
Семестр 1	60		2	42		4(1)	4		2				66		34		52	6
	2-50		2-50	10-25		10-25	2-50		2-50				1-1		1-1			
Семестр 2	64		2	28		2(1)			2				82		34		34	6
	2-50		2-50	10-25		10-25			2-50				1-1		1-1			
Семестр 3	60		2	28		2(1)	4		2				82		34		38	6
	2-50		2-50	10-25		10-25	2-50		2-50				1-1		1-1			
Семестр 4	32		2	30					2				75		37		36	5
	2-50		2-50	10-25					2-50				1-1		1-1			
ИТОГО	216		8	128		8	8		8				305		139			23

Виды, формы и сроки текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации						
Код модуля в составе дисциплины, практики и т.п.	Формы текущего контроля успеваемости		Виды промежуточной аттестации		Виды итоговой аттестации (только для программ итоговой аттестации и дополнительных образовательных программ)	
	Формы	Сроки	Виды	Сроки	Виды	Сроки
ОСНОВНАЯ ТРАЕКТОРИЯ						
очная форма обучения						
Семестр 1			зачёт, по результатам работы за период обучения, экзамен, устно, традиционная форма	по графику промежуточной аттестации, по графику промежуточной аттестации		
Семестр 2			зачёт, по результатам работы за период обучения,	по графику промежуточной аттестац		

			экзамен, устно, традиционная форма	ии, по графику промежуточной аттестации		
Семестр 3			зачёт, по результатам работы за период обучения, экзамен, устно, традиционная форма	по графику промежуточной аттестации, по графику промежуточной аттестации		
Семестр 4			зачёт, по результатам работы за период обучения, экзамен, устно, традиционная форма	по графику промежуточной аттестации, по графику промежуточной аттестации		

2.2. Структура и содержание учебных занятий

Период обучения (модуль): **Семестр 1**

№ п/п	Наименование темы (раздела, части)	Вид учебных занятий	Количество часов
1	Элементарная теория колец и арифметика	Лекции	14
		практические занятия	6
		в присутствии преподавателя	
		по методическим материалам	15
2	Многочлены и поля	Лекции	16
		практические занятия	8
		в присутствии преподавателя	
		по методическим материалам	18
3	Коллоквиум	коллоквиум	4
4	Векторные пространства и начала линейной алгебры	Лекции	10
		практические занятия	10
		в присутствии преподавателя	
		по методическим материалам	11
5	Контрольная работа	контрольная работа	4
6	Элементарная теория групп	Лекции	12
		практические занятия	10
		в присутствии преподавателя	
		по методическим материалам	13
7	Определители	Лекции	8
		практические занятия	8
		в присутствии преподавателя	
		по методическим материалам	9
8	Зачет	промежуточная аттестация (ауд)	2
9	Экзамен	промежуточная аттестация (ауд)	2
		промежуточная аттестация (с.р.)	34

Раздел 1: Элементарная теория колец и арифметика

1. Определение кольца. Простейшие следствия из аксиом. Примеры. Целостность.
2. Евклидовы кольца. Евклидовость **Z**. Неприводимые и простые элементы. Идеалы, главные идеалы. Евклидово кольцо как кольцо главных идеалов.
3. Основная теорема арифметики.
4. Кольцо вычетов **Z**/n**Z**. Китайская теорема об остатках.
5. Определение поля. **Z**/p**Z** как поле. Поле частных целостного кольца.
6. Определение гомоморфизма и изоморфизма колец. Фактор-кольцо.
7. Теорема о гомоморфизме.

Раздел 2: Многочлены и поля

1. Кольцо многочленов от одной переменной. Целостность и евклидовость кольца многочленов от одной переменной над полем. Поле рациональных функций.

2. Лемма Гаусса. Факториальные кольца. Факториальность кольца многочленов от нескольких переменных над полем.
3. Присоединение переменной к полю. Поле разложение многочлена. Кратные корни. Теорема Виета.
4. Интерполяция Лагранжа и Эрмита. Формальное и функциональное равенство многочленов.
5. Алгебраическое замыкание и его существование.
6. Комплексные числа. Решение квадратных уравнений в **C**.
7. Основная теорема алгебры.
8. Разложение рациональной функции в простейшие дроби над **C** и над **R**.

Раздел 3: Векторные пространства и начала линейной алгебры

1. Определение векторного пространства. Линейная зависимость. Существование базиса. Лемма о замене. Размерность.
2. Линейные отображения векторных пространств. Подпространство, фактор-пространство. Ранг линейного отображения.
3. Матрица линейного отображения. Композиция линейных отображений и произведение матриц. Кольцо матриц.
4. Элементарные преобразования. Метод Гаусса. Однородные и неоднородные системы линейных уравнений.
5. Теорема Кронекера-Капелли.

Раздел 4: Элементарная теория групп

1. Определение группы. Циклическая группа. Группа перестановок. Циклы, транспозиции. Знак перестановки.
2. Действие группы на множестве. Орбиты. Классы сопряженности.
3. Группа обратимых элементов кольца. Полная линейная группа.
Вычисление обратимых элементов **Z**/n**Z**. Функция Эйлера.
4. Гомоморфизмы и изоморфизмы групп. Смежные классы, теорема Лагранжа. Теорема Эйлера.
5. Многочлены деления круга. Конечные поля.
6. Фактор-группа, теорема о гомоморфизме.

Раздел 5: Определители

1. Определитель матрицы. Инвариантность при элементарных преобразованиях, разложение по строчке и столбцу.
2. Присоединенная матрица. Формула Крамера. Определитель транспонированной матрицы.
3. Вычисление определителя методом Гаусса.
4. Плотность обратимых матриц по Зарискому. Определитель произведения матриц.

Период обучения (модуль): **Семестр 2**

№ п/п	Наименование темы (раздела, части)	Вид учебных занятий	Количество часов
1	Теория линейных операторов	Лекции	10
		практические занятия	6
		в присутствии преподавателя	
		по методическим материалам	13

2	Квадратичные и эрмитовы формы. Матричные разложения.	Лекции	16
		практические занятия	8
		в присутствии преподавателя	
		по методическим материалам	20
3	Контрольная работа	контрольная работа	4
4	Группа движений пространства и кватернионы	Лекции	6
		практические занятия	2
		в присутствии преподавателя	
		по методическим материалам	8
5	Теория групп	Лекции	16
		практические занятия	8
		в присутствии преподавателя	
		по методическим материалам	21
6	Представления конечных групп	Лекции	16
		практические занятия	4
		в присутствии преподавателя	
		по методическим материалам	20
7	Зачет	промежуточная аттестация (ауд)	2
8	Экзамен	промежуточная аттестация (ауд)	2
		промежуточная аттестация (с.р.)	34

Раздел 1: Теория линейных операторов

1. Определение модуля. Примеры. Модуль над кольцом многочленов как пространство с оператором.
2. Теорема о строении конечнопорожденных модулей над кольцом главных идеалов.
3. Нормальная форма Фробениуса. Минимальный и характеристический многочлен. Теорема Кэли-Гамильтона.
4. Собственные векторы и собственные числа. Существование собственных векторов над алгебраически замкнутым полем.
5. Жорданова нормальная форма.

Раздел 2: Квадратичные и эрмитовы формы. Матричные разложения

1. Двойственное векторное пространство. Двойственный базис.
2. Квадратичные формы. Теорема Лагранжа о диагонализации. Невырожденные формы, дискриминант.
3. Теорема Витта о сокращении. Индекс Витта.
4. Ортогонализация Грама-Шмидта и QR-разложение.
5. Нормальные операторы. Спектральная теорема. Полярное разложение.
6. Разложение Холецкого.
7. Квадратичные формы над C и над R. Критерий Сильвестра.
8. Эрмитовы формы. Комплексные аналоги матричных разложений.

Раздел 3: Группа движений пространства и кватернионы

1. Группа движений пространства, подгруппа собственных движений. Порождение отражениями. Существование оси вращения.
2. Алгебра кватернионов. Норма, деление. Определение тела. Теорема Фробениуса.

3. Параметризация группы собственных движений пространства кватернионами.

Раздел 4: Теория групп

1. Свободная группа.
2. Задание образующими и соотношениями.
3. Центр. Коммутаторы и коммутант. Совершенные и разрешимые группы. Верхний и нижний центральный ряд.
4. Нильпотентность p-групп. Группы порядка p^3.
5. Силовские подгруппы и теоремы Силова.
6. Простота знакопеременной группы.
7. Полупрямое произведение групп.
8. Группы порядка pq.

Раздел 5: Представления конечных групп

1. Определение представления. Примеры. Регулярное представление. Прямая сумма.
2. Неприводимые представления. Представления абелевых групп.
3. Лемма Шура и теорема Машке.
4. Матричные коэффициенты представлений и их ортогональность.
5. Некоммутативное дискретное преобразование Фурье. Теорема Бернсайда.
6. Характеры. Соотношения ортогональности, таблица характеров. Примеры.
7. Индуцированные представления. Закон взаимности Фробениуса.
8. Инвариантные формы на представлениях. Вещественные представления, индекс Шура.

Период обучения (модуль): **Семестр 3**

№ п/п	Наименование темы (раздела, части)	Вид учебных занятий	Количество часов
1	Полилинейная и внешняя алгебра	Лекции	20
		практические занятия	16
		в присутствии преподавателя	
		по методическим материалам	30
2	Контрольная работа	контрольная работа	4
3	Начала теории категорий	Лекции	22
		практические занятия	6
		в присутствии преподавателя	
		по методическим материалам	25
4	Коллоквиум	коллоквиум	4
5	Начала гомологической алгебры	Лекции	18
		практические занятия	6
		в присутствии преподавателя	
		по методическим материалам	27
6	Зачет	промежуточная аттестация (ауд)	2
7	Экзамен	промежуточная аттестация (ауд)	2
		промежуточная аттестация (с.р.)	34

Раздел 1: Полилинейная и внешняя алгебра

1. Билинейные формы. Определение тензорного произведения модулей, его существование и единственность.
2. Базис тензорного произведения. Несколько раз ковариантные и контравариантные тензоры, поведение при замене базиса.
3. Билинейная форма как 2-ковариантный тензор, опускание и поднимание индексов. Свертка. Знакопеременные формы и поливекторы. Классификация симплектических форм и бивекторов.
4. Внешняя алгебра: определение, существование и единственность, базис. Градуированная коммутативность.
5. Элемент объема. Определитель в терминах внешней алгебры. Формула Лапласа. Двойственная к внешней алгебре.
6. Свертка поливектора с ковектором. Двойственность дополнительных внешних степеней.
7. Вложение Плюккера и соотношения Плюккера. Звезда Ходжа. Интерпретация векторного произведения в R^3.
8. Симметрическая алгебра. Алгебра многочленов как симметрическая алгебра.
9. Комплекс Кошуля.
10. Алгебра Клиффорда

Раздел 2: Начала теории категорий. Теория Галуа

1. Определение категории. Конкретные категории. Примеры.
2. Универсальные притягивающие и отталкивающие объекты. Произведение и копроизведение.
3. Определение функтора и естественного преобразования функторов. Примеры.
4. Пределы и копределы.
5. Категория функторов в Sets. Лемма Йонеды.
6. Сопряженность функторов. Сопряженность тензорного произведения и Hom.
7. Монады.
8. Аддитивные и абелевы категории.
9. Нормальные и сепарабельные расширения полей. Этальные алгебры.
10. Основная теорема теории Галуа.
11. Топология на абсолютной группе Галуа. Категорная формулировка основной теоремы теории Галуа.

Раздел 3: Начала гомологической алгебры

1. Короткие и длинные точные последовательности. Лемма о змее.
2. Точность функторов слева и справа. Hom и тензорное произведение.
3. Проективные, инъективные и плоские модули.
4. Проективная и инъективная резольвента.
5. Функторы Ext и Tor. Вычисление в случае колец главных идеалов.
6. Определение когомологий групп. Бар-резольвента.
7. Категория комплексов. Гомотопии и квазиизоморфизмы.
8. Локализация категорий.
9. Понятие триангулированной категории. Производная категория.

Период обучения (модуль): **Семестр 4**

№	Наименование темы (раздела, части)	Вид учебных занятий	Количество

п/п			часов
1	Числовые кольца	Лекции	16
		практические занятия	12
		в присутствии преподавателя	
		по методическим материалам	37
2	p-адические поля	Лекции	16
		практические занятия	18
		в присутствии преподавателя	
		по методическим материалам	38
3	Зачет	промежуточная аттестация (ауд)	2
4	Экзамен	промежуточная аттестация (ауд)	2
		промежуточная аттестация (с.р.)	37

Раздел 1: Числовые кольца

1. Нетеровы кольца.
2. Целые элементы и целое замыкание.
3. Кольца дискретного нормирования.
4. Локализация. Дедекиндовы кольца.
5. Основная теорема арифметики в дедекиндовых кольцах. Группа классов идеалов.
6. Теорема Минковского о выпуклом теле.
7. Числовые кольца. Теорема Дирихле о единицах.
8. Конечность группы классов идеалов.

Раздел 2: p-адические поля

1. Нормирование поля, пополнение.
2. Теорема Островского.
3. Лемма Гензеля.
4. Мультипликативная группа $\mathbf{Q}_p$. Квадраты в $\mathbf{Q}_p$.
5. Символ Гильберта.
6. Квадратичные формы над $\mathbf{Q}_p$.
7. Теорема Минковского-Хассе.

Раздел 3. Обеспечение учебных занятий
3.1. Методическое обеспечение
3.1.1 Методические указания по освоению дисциплины

Посещение лекций и практических занятий

3.1.2 Методическое обеспечение самостоятельной работы

Основная и дополнительная литература

3.1.3 Методика проведения текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации и критерии оценивания

Методика проведения зачета
Зачет проводится в устной форме. Для получения зачета необходимо решить 60% задач, предлагаемых в течение семестра. В случае, если к моменту проведения зачета студент решил меньшее количество задач, на зачете ему предлагаются задачи аналогичные по тематике и сложности. Задачи даются в форме домашних заданий с устной сдачей («листочки»), письменных домашних заданий и контрольных. Темы задач фиксированы, количество и форма выдачи остается на усмотрение преподавателя практических занятий. Возможна выдача задач повышенной сложности, решение которых засчитывается в качестве индивидуальных достижений студента (при подаче заявок на именные стипендии, конкурсы и т.п.); сдача таких заданий проводится в устной форме.

Методика проведения экзамена
Экзамен проводятся в устной форме. Билет состоит из двух вопросов. Время подготовки ответа на вопросы билета составляет 60 минут.
Использование конспектов и учебников, а также электронных устройств хранения, обработки или передачи информации при подготовке и ответе на вопросы экзамена категорически запрещено. В случае обнаружения факта использования недозволенных материалов (устройств) составляется акт и студент удаляется с экзамена. После ответа на вопросы билета преподаватель задает несколько дополнительных вопросов, на основании оценки ответов на которые итоговая оценка по предмету может быть повышена или понижена. В спорной ситуации могут быть учтены результаты сдачи коллоквиума по предмету.
Критерии выставления оценок
Оценка «отлично» ставится за полностью раскрытый теоретический материал и правильные ответы на дополнительные вопросы преподавателя. В болонской шкале оценка может быть скорректирована в ту или иную сторону с учетом малозначительных погрешностей изложения или, напротив, углубленного изложения материала.
Оценка «хорошо» ставится за изложенный теоретический материал билета (возможно с помощью наводящих подсказок преподавателя).
Оценка «удовлетворительно» ставится за знание основных вопросов по каждой теме.
Оценка «неудовлетворительно» выставляется, если не выполняются условия для получения оценок «отлично», «хорошо» и «удовлетворительно».

3.1.4 Методические материалы для проведения текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации (контрольно-измерительные материалы, оценочные средства)

Период обучения (модуль): **Семестр 1**

Темы **задач**:

1. Алгоритм Евклида для целых чисел, многочленов, целых гауссовых чисел. Решение линейных сравнений. Основная теорема арифметики. Арифметические функции. Функция Эйлера. Квадратичные вычеты.

2. Определение кольца и идеала. Факторкольца. Теорема Безу и теорема Виета. Поле разложения многочлена. Интерполяция Лагранжа и Эрмита. Комплексные числа и основная теорема алгебры. Разложение на простейшие. Корни из единицы, многочлены деления круга и тригонометрические тождества. Конечные поля.

3. Векторные пространства и линейные отображения. Элементарные преобразования и метод Гаусса. Решение систем линейных уравнений.

4. Определение группы и гомоморфизма. Порядок элемента, теорема Лагранжа. Перестановки, разложение на циклы, разложение в произведение транспозиций, знак перестановки. Определитель и его свойства. Вычисление определителей. Метод Крамера.

Вопросы к **коллоквиуму** совпадают с вопросами 1-15 к экзамену.

Список вопросов к экзамену:

1. Определение кольца. Простейшие следствия из аксиом. Примеры. Целостность.
2. Евклидовы кольца. Евклидовость **Z**. Неприводимые и простые элементы. Идеалы, главные идеалы. Евклидово кольцо как кольцо главных идеалов.
3. Основная теорема арифметики.
4. Кольцо вычетов **Z**/n**Z**. Китайская теорема об остатках.
5. Определение поля. **Z**/p**Z** как поле. Поле частных целостного кольца.
6. Определение гомоморфизма и изоморфизма колец. Фактор-кольцо.
7. Теорема о гомоморфизме.
8. Кольцо многочленов от одной переменной. Целостность и евклидовость кольца многочленов от одной переменной над полем. Поле рациональных функций.
9. Лемма Гаусса. Факториальные кольца. Факториальность кольца многочленов от нескольких переменных над полем.
10. Присоединение переменной к полю. Поле разложение многочлена. Кратные корни. Теорема Виета.
11. Интерполяция Лагранжа и Эрмита. Формальное и функциональное равенство многочленов.
12. Алгебраическое замыкание и его существование.
13. Комплексные числа. Решение квадратных уравнений в **C**.
14. Основная теорема алгебры (формулировка и набросок доказательства).
15. Разложение рациональной функции в простейшие дроби над **C** и над **R**.
16. Определение векторного пространства. Линейная зависимость. Существование базиса. Лемма о замене. Размерность.
17. Линейные отображения векторных пространств. Подпространство, фактор-пространство. Ранг линейного отображения.
18. Матрица линейного отображения. Композиция линейных отображений и произведение матриц. Кольцо матриц.
19. Элементарные преобразования. Метод Гаусса. Однородные и неоднородные системы линейных уравнений.
20. Теорема Кронекера-Капелли.

21. Определение группы. Циклическая группа. Группа перестановок. Циклы, транспозиции. Знак перестановки.
22. Действие группы на множестве. Орбиты. Классы сопряженности.
23. Группа обратимых элементов кольца. Полная линейная группа.
Вычисление обратимых элементов **Z**/n**Z**. Функция Эйлера.
24. Гомоморфизмы и изоморфизмы групп. Смежные классы, теорема Лагранжа. Теорема Эйлера.
25. Многочлены деления круга. Конечные поля.
26. Фактор-группа, теорема о гомоморфизме.
27. Определитель матрицы. Инвариантность при элементарных преобразованиях, разложение по строчке и столбцу.
28. Присоединенная матрица. Формула Крамера. Определитель транспонированной матрицы.
29. Вычисление определителя методом Гаусса.
30. Плотность обратимых матриц по Зарискому. Определитель произведения матриц.

Период обучения (модуль): **Семестр 2**

Темы **задач**:

1. Линейные операторы. Собственные числа, собственные и корневые подпространства. Характеристический и минимальный многочлены. Жорданова форма. Форма Смита и конечнопорожденные абелевы группы.

2. Квадратичные формы. Ортогонализация Грама-Шмидта и QR-разложение. Полярное разложение. Разложение Холецкого. Эрмитовы формы. Кватернионы. Реализация поворотов в пространстве и в четырехмерном пространстве кватернионами.

3. Действия групп на множествах. Транзитивность и примитивность действия. Нильпотентные группы, p-группы и теоремы Силова. Полупрямое произведение и сплетение. Задание групп образующими и соотношениями. Алгоритм Коксетера-Тодда.

4. Представления конечных групп. Представления абелевых групп и дискретное преобразование Фурье. Таблица характеров и соотношения ортогональности. Вычисление таблиц характеров групп небольших порядков.

Список вопросов к экзамену:

1. Определение модуля. Примеры. Модуль над кольцом многочленов как пространство с оператором.
2. Теорема о строении конечнопорожденных модулей над кольцом главных идеалов.
3. Нормальная форма Фробениуса. Минимальный и характеристический многочлен.
4. Теорема Кэли-Гамильтона.
5. Собственные векторы и собственные числа. Существование собственных векторов над алгебраически замкнутым полем.
6. Жорданова нормальная форма.
7. Двойственное векторное пространство. Двойственный базис.
8. Квадратичные формы. Теорема Лагранжа о диагонализации. Невырожденные формы, дискриминант.
9. Теорема Витта о сокращении. Индекс Витта.
10. Ортогонализация Грама-Шмидта и QR-разложение.
11. Нормальные операторы. Спектральная теорема. Полярное разложение.

12. Разложение Холецкого.
13. Квадратичные формы над C и над R. Критерий Сильвестра.
14. Эрмитовы формы. Комплексные аналоги матричных разложений.
15. Группа движений пространства, подгруппа собственных движений. Порождение отражениями. Существование оси вращения.
16. Алгебра кватернионов. Норма, деление. Определение тела. Теорема Фробениуса.
17. Параметризация группы собственных движений пространства кватернионами.
18. Свободная группа.
19. Задание образующими и соотношениями.
20. Центр. Коммутаторы и коммутант. Совершенные и разрешимые группы. Верхний и нижний центральный ряд.
21. Нильпотентность p-групп. Группы порядка p^3.
22. Силовские подгруппы и теоремы Силова.
23. Простота знакопеременной группы.
24. Полупрямое произведение групп.
25. Группы порядка pq.
26. Определение представления. Примеры. Регулярное представление. Прямая сумма.
27. Неприводимые представления. Представления абелевых групп.
28. Лемма Шура и теорема Машке.
29. Матричные коэффициенты представлений и их ортогональность.
30. Некоммутативное дискретное преобразование Фурье. Теорема Бернсайда.
31. Характеры. Соотношения ортогональности, таблица характеров. Примеры.
32. Индуцированные представления. Закон взаимности Фробениуса.
33. Инвариантные формы на представлениях. Вещественные представления, индекс Шура.

Период обучения (модуль): **Семестр 3**

Темы **задач**:

1. Примеры тензорных произведений модулей. Опускание и поднимание индексов, свертка. Вычисления во внешней алгебре. Формула Лапласа. Вложение Плюккера и формулы аналитической геометрии «без знаменателей». Алгебра Клиффорда.

2. Определения категории, функтора и естественного преобразования. Примеры пределов и копределов. Примеры сопряженных функторов. Универсальные алгебраические структуры в терминах монад. Соответствие между подгруппами и подполями в теории Галуа.

3. Диаграммный поиск. Вычисление проективной резольвенты в простых случаях. Когомологии циклической группы. Простейшие следствия из аксиом триангулированной категории.

Вопросы к **коллоквиуму** совпадают с вопросами 1-12 к экзамену.

Список вопросов к экзамену:

1. Билинейные формы. Определение тензорного произведения модулей, его существование и единственность.
2. Базис тензорного произведения. Несколько раз ковариантные и контравариантные тензоры, поведение при замене базиса.
3. Билинейная форма как 2-ковариантный тензор, опускание и поднимание индексов. Свертка.

4. Знакопеременные формы и поливекторы. Классификация симплектических форм и бивекторов.
5. Внешняя алгебра: определение, существование и единственность, базис. Градуированная коммутативность.
6. Элемент объема. Определитель в терминах внешней алгебры. Формула Лапласа. Двойственная к внешней алгебре.
7. Свертка поливектора с ковектором. Двойственность дополнительных внешних степеней.
8. Вложение Плюккера и соотношения Плюккера.
9. Звезда Ходжа. Интерпретация векторного произведения в R^3.
10. Симметрическая алгебра. Алгебра многочленов как симметрическая алгебра.
11. Комплекс Кошуля.
12. Алгебра Клиффорда
13. Определение категории. Конкретные категории. Примеры.
14. Универсальные притягивающие и отталкивающие объекты. Произведение и копроизведение.
15. Определение функтора и естественного преобразования функторов. Примеры.
16. Пределы и копределы.
17. Категория функторов в Sets. Лемма Йонеды.
18. Сопряженность функторов. Сопряженность тензорного произведения и Hom.
19. Монады.
20. Аддитивные и абелевы категории.
21. Нормальные и сепарабельные расширения полей. Этальные алгебры.
22. Основная теорема теории Галуа.
23. Топология на абсолютной группе Галуа. Категорная формулировка основной теоремы теории Галуа.
24. Короткие и длинные точные последовательности. Лемма о змее.
25. Точность функторов слева и справа. Hom и тензорное произведение.
26. Проективные, инъективные и плоские модули.
27. Проективная и инъективная резольвента.
28. Функторы Ext и Tor. Вычисление в случае колец главных идеалов.
29. Определение когомологий групп. Бар-резольвента.
30. Категория комплексов. Гомотопии и квазиизоморфизмы.
31. Локализация категорий.
32. Понятие триангулированной категории.
33. Производная категория.

Период обучения (модуль): **Семестр 4**

Темы **задач**:

1. Сумма и произведение целых элементов (явные формулы для целой зависимости). Примеры локализаций. Квадратичные кольца и идеалы в них. Уравнение Пелля. Кольца целых в круговых полях.

2. Свойства нормирований. Вычисления в $\mathbf{Q}_p$. Свойства символа Гильберта. Квадратичные формы над **Q.**

Список вопросов к экзамену:

1. Нетеровы кольца.
2. Целые элементы и целое замыкание.

3. Кольца дискретного нормирования.
4. Локализация. Дедекиндовы кольца.
5. Основная теорема арифметики в дедекиндовых кольцах. Группа классов идеалов.
6. Теорема Минковского о выпуклом теле.
7. Числовые кольца. Теорема Дирихле о единицах.
8. Конечность группы классов идеалов.
9. Нормирование поля, пополнение.
10. Теорема Островского.
11. Лемма Гензеля.
12. Мультипликативная группа $\mathbf{Q}_p$. Квадраты в $\mathbf{Q}_p$.
13. Символ Гильберта.
14. Квадратичные формы над $\mathbf{Q}_p$.
15. Теорема Минковского-Хассе (набросок доказательства).

3.1.5 Методические материалы для оценки обучающимися содержания и качества учебного процесса

3.2. Кадровое обеспечение

3.2.1 Образование и (или) квалификация штатных преподавателей и иных лиц, допущенных к проведению учебных занятий

К чтению лекций должны привлекаться преподаватели, имеющие ученую степень доктора или кандидата наук (в том числе степень PhD, прошедшую установленную процедуру признания и установления эквивалентности) и/или ученое звание профессора или доцента.

3.2.2 Обеспечение учебно-вспомогательным и (или) иным персоналом

не требуется

3.3. Материально-техническое обеспечение

3.3.1 Характеристики аудиторий (помещений, мест) для проведения занятий

Стандартно оборудованные лекционные аудитории, должны вмещать поток в соответствии со списком студентов

3.3.2 Характеристики аудиторного оборудования, в том числе неспециализированного компьютерного оборудования и программного обеспечения общего пользования

доска для письма мелом или фломастером

3.3.3 Характеристики специализированного оборудования

не требуется

3.3.4 Характеристики специализированного программного обеспечения

не требуется

3.3.5 Перечень и объёмы требуемых расходных материалов

Мел — не менее 1 куска на час лекционных занятий, фломастеры для доски, губка

3.4. Информационное обеспечение

3.4.1 Список обязательной литературы

1. Винберг Э.Б., Курс алгебры. – М.: МЦНМО, 2013
2. Кострикин А.И., Сборник задач по алгебре. – М.: МЦНМО, 2009
3. Антипов М.А. и др. Задачи по алгебре. Комплексные числа и многочлены. – СПб.: Издательство СПбГУ, 2011
4. Антипов М.А. и др. Задачи по алгебре. Основы теории чисел. – СПб.: Издательство СПбГУ, 2008

3.4.2 Список дополнительной литературы

1. Маклейн С., Категории для работающего математика. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004
2. Боревич З.И., Шафаревич И.Р., Теория чисел. – М.: Наука, 1985
3. Жуков И.Б., Коммутативная алгебра. – СПб.: Издательство СПбГУ, 2009

3.4.3 Перечень иных информационных источников

не предусмотрен

Раздел 4. Разработчики программы

Петров Виктор Александрович, кандидат физ.-мат. наук, с.н.с. лаборатории Чебышева СПбГУ, victorapetrov@gmail.com