Санкт-Петербургский государственный университет

Р А Б О Ч А Я   П Р О Г Р А М М А
УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ

Математический анализ
Mathematical Analysis

Язык(и) обучения

русский

Трудоемкость в зачетных единицах: 24

Регистрационный номер рабочей программы: 042218

Раздел 1. Характеристики учебных занятий

1. Цели и задачи учебных занятий

Сообщение сведений о математическом анализе в объеме, необходимом для общего развития и изучения смежных дисциплин физико-математического цикла. Усвоение основных идей, понятий и фактов математического анализа.

1.2. Требования подготовленности обучающегося к освоению содержания учебных занятий (пререквизиты)

Не предусмотрены.

1.3. Перечень результатов обучения (learning outcomes)

Обучающийся должен овладеть теоретическим материалом в объеме, предусмотренном программой, уметь применять полученные знания при решении теоретических и прикладных задач, на основе анализа освоенных разделов: дифференциал и производная, экстремумы функций, равномерная сходимость, интеграл Римана-Дарбу, линейные операторы, функции нескольких вещественных переменных, теория меры, функции комплексного переменного.

1.4. Перечень и объём активных и интерактивных форм учебных занятий

практические занятия 128 часов, контрольные работы 8 часов, коллоквиумы 8 часов, промежуточная аттестация (зачеты и экзамены) 16 часов

Раздел 2. Организация, структура и содержание учебных занятий
2.1. Организация учебных занятий

2.1.1 Основной курс

Трудоёмкость, объёмы учебной работы и наполняемость групп обучающихся																		
Код модуля в составе дисциплины, практики и т.п.	Контактная работа обучающихся с преподавателем												Самостоятельная работа				Объём активных и интерактивных форм учебных занятий	Трудоёмкость
	лекции	семинары	консультации	практические занятия	лабораторные работы	контрольные работы	коллоквиумы	текущий контроль	промежуточная аттестация	итоговая аттестация	под руководством преподавателя	в присутствии преподавателя	сам. раб. с использованием методических материалов	текущий контроль (сам.раб.)	промежуточная аттестация (сам.раб.)	итоговая аттестация (сам.раб.)		
ОСНОВНАЯ ТРАЕКТОРИЯ																		
очная форма обучения																		
Семестр 1	60		2	42		4(1)	4		4				68		32		52	6
	2-50		2-50	10-25		10-25	2-50		2-50				1-1		1-1			
Семестр 2	64		2	28		2(1)			4				82		34		34	6
	2-50		2-50	10-25		10-25			2-50				1-1		1-1			
Семестр 3	60		2	28		2(1)	4		2				82		34		38	6
	2-50		2-50	10-25		10-25	2-50		2-50				1-1		1-1			
Семестр 4	64		2	30					2				80		36		36	6
	2-50		2-50	10-25					2-50				1-1		1-1			
ИТОГО	248		8	128		8	8		12				312		136			24

Виды, формы и сроки текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации						
Код модуля в составе дисциплины, практики и т.п.	Формы текущего контроля успеваемости		Виды промежуточной аттестации		Виды итоговой аттестации (только для программ итоговой аттестации и дополнительных образовательных программ)	
	Формы	Сроки	Виды	Сроки	Виды	Сроки
ОСНОВНАЯ ТРАЕКТОРИЯ						
очная форма обучения						
Семестр 1			зачёт, по результатам работы за период оубчения, экзамен, устно, традиционная форма	по графику промежуточной аттестации, по графику промежуточной аттестации		
Семестр 2			зачёт, по результатам работы за период оубчения,	по графику промежуточной аттестац		

			экзамен, устно, традиционная форма	ии, по графику промежуточной аттестации		
Семестр 3			зачёт, по результатам работы за период обучения, экзамен, устно, традиционная форма	по графику промежуточной аттестации, по графику промежуточной аттестации		
Семестр 4			зачёт, по результатам работы за период обучения, экзамен, устно, традиционная форма	по графику промежуточной аттестации, по графику промежуточной аттестации		

2.2. Структура и содержание учебных занятий

Период обучения (модуль): **Семестр 1**

№ п/п	Наименование темы (раздела, части)	Вид учебных занятий	Количество часов
1	Базовые понятия математического анализа. Вещественные числа.	Лекции	10
		практические занятия	6
		в присутствии преподавателя	
		по методическим материалам	15
2	Пределы. Компактность. Непрерывность.	Лекции	20
		практические занятия	8
		в присутствии преподавателя	
		по методическим материалам	18
3	Коллоквиум	коллоквиум	4
4	Дифференциал и производная. Экстремумы функций. Равномерная сходимость.	Лекции	14
		практические занятия	10
		в присутствии преподавателя	
		по методическим материалам	11
5	Контрольная работа	контрольная работа	4
6	Интеграл Римана-Дарбу.	Лекции	8
		практические занятия	10
		в присутствии преподавателя	
		по методическим материалам	13
7	Формула Тейлора. Степенные ряды.	Лекции	8
		практические занятия	8
		в присутствии преподавателя	
		по методическим материалам	11
8	Зачет	промежуточная аттестация (ауд)	2
9	Экзамен	промежуточная аттестация (ауд)	2
		промежуточная аттестация (с.р.)	32

Раздел 1. Базовые понятия математического анализа. Вещественные числа.

1. Сведения о вещественных числах: алгебраические операции; целые, натуральные и рациональные числа; неравенства; ограниченные множества; аксиома Архимеда; отрезки; наличие рациональных чисел на любом невырожденном отрезке.
2. Аксиома индукции, рассуждения по индукции. Неравенство Адамара, его следствия. «Щели», аксиома Кантора-Дедекинда. Узкие щели. Существование квадратного корня из 2.
3. Иррациональность квадратного корня из двух. Существование иррациональных точек на любом невырожденном отрезке. Теорема о вложенных отрезках. Десятичное разложение вещественного числа.
4. Грани: определение, существование и описание. Описание множества всех точек, попадающих в заданную щель. Окрестности, проколотые окрестности. Предельные точки множества. Замкнутые множества, замыкание. Принадлежность граней замыканию.

5. Теорема о связности отрезка (замкнутый отрезок не представляется в виде объединения двух непересекающихся непустых замкнутых множеств). Теорема о компактности (бесконечное ограниченное множество имеет предельную точку).

Раздел 2. Пределы. Компактность. Непрерывность.

1. Предел функции в точке (включая случай точек $+\infty$ и $-\infty$) на языке окрестностей. Предел постоянной функции. Единственность предела. Предел сужения функции. Ограниченность функции, имеющей предел. Предельный переход в неравенстве. Принцип «двух полицейских». Пересказ определения предела на языке неравенств.
2. Предел суммы, произведения, частного двух функций. Предел монотонной функции. Ограниченность и неограниченность сумм обратных степеней.
3. Критерий Коши существования предела. Понятие о сходящемся ряде, абсолютная и условная сходимость, теорема сравнения. Число $e = \sum_{n\geq o} 1/n!$, его иррациональность.
4. Пределы справа и слева, критерий существования предела в терминах односторонних пределов. Предел суперпозиции двух функций. Предел последовательности как частный случай предела функции. Предел подпоследовательности (как частный случай уже доказанных теорем). Предел перестановки последовательности.
5. Описание предельных точек и точек замыкания множества в терминах сходящихся последовательностей. Вторая форма теоремы о компактности (всякая ограниченная последовательность имеет сходящуюся подпоследовательность). Предел функции в терминах сходящихся последовательностей. Бесконечные пределы.
6. Верхний и нижний пределы функции в точке. Описание на языке «ε-δ». Эквивалентность существования предела совпадению верхнего и нижнего пределов. Еще одно доказательство критерия Коши. Поведение верхнего и нижнего пределов при умножении функции на число. Субаддитивность верхнего предела и супераддитивность нижнего предела.
7. Бесконечно большие и бесконечно малые, их сравнение, символы O и o. Асимптотическая эквивалентность функций в точке.
8. Непрерывность функции. Замкнутость прообраза замкнутого множества. Непрерывность суперпозиции. Теорема Больцано-Коши о промежуточных значениях непрерывной функции, заданной на отрезке (с помощью теоремы о связности отрезка).
9. Эквивалентность инъективности непрерывной функции на отрезке ее строгой монотонности, непрерывность обратной функции к инъективной непрерывной функции на отрезке. Пример: корни любой степени, степень с рациональным показателем.
10. Теорема Вейерштрасса I (об ограниченности функции, непрерывной на замкнутом ограниченном множестве). Теорема Вейерштрасса II (о максимуме и минимуме функции, непрерывной на замкнутом ограниченном множестве). Равномерная непрерывность. Теорема Кантора. Разрывы, классификация разрывов

Раздел 3. Дифференциал и производная. Экстремумы функций. Равномерная сходимость.

1. Дифференциал и производная. Эквивалентные определения производной. Связь между непрерывностью и дифференцируемостью. Дифференцирование суммы, произведения, частного.
2. Производная суперпозиции. Производная обратной функции. Вычисление производных от полиномов и степеней с рациональным показателем. Таблица

производных прочих элементарных функций (доказательства откладываются до их строгого определения).
3. Необходимое условие экстремума. Теорема Ролля. Теоремы Коши и Лагранжа. Использование формулы Лагранжа при оценках. Постоянство функции с нулевой производной. Знак производной и монотонность функции.
4. Правило Лопиталя (в случае конечного предела в конечной точке). Односторонние производные. (Односторонняя) дифференцируемость функции в точке, в которой существует (односторонний) предел производной. Производная и касательная к графику. Производные старших порядков. Классы C^k и C^∞.
5. Локальная формула Тейлора, остаточный член в форме Пеано. Информация: формулы Маклорена для sin x, cos x, e^x, (1+x)^m, log(1+x). Примеры вычисления пределов с помощью формулы Тейлора. Достаточные условия экстремума в терминах старших производных.
6. Поточечная и равномерная сходимость последовательностей функций. Критерий Коши для равномерной сходимости. Простейший вариант теоремы Стокса-Зайделя. Достаточный критерий Вейерштраса равномерной сходимости ряда из функций.
7. Дифференцируемость предела последовательности функций, производные которых сходятся равномерно. Пример Ван-Дер-Вардена непрерывной, но нигде не дифференцируемой функции.

Раздел 4. Интеграл Римана-Дарбу.

1. Первообразная. Неопределенный интеграл. Интегрирование по частям и замена переменной в неопределенном интеграле. Примеры нахождения первообразных.
2. Суммы Дарбу, их свойства. Интеграл Римана-Дарбу. Интегрируемость ступенчатых функций. Интегрируемость непрерывных функций.
3. Аддитивность и однородность интеграла Римана-Дарбу. Интегрирование неравенств, основная оценка для интеграла. Интегрирование равномерно сходящейся последовательности непрерывных функций.
4. Существование первообразной у непрерывной функции и формула Ньютона - Лейбница. Теорема о среднем. Интегрирование по частям и замена переменной в определенном интеграле.

Раздел 5. Формула Тейлора. Степенные ряды.

1. Формула Тейлора с остаточным членом в интегральной форме. Остаточный член в форме Лагранжа. Аддитивная функция промежутка, ее плотность. Теорема о согласованной системе оценок. Приложение: площадь подграфика (при интуитивном понятии о площади).
2. Описательное (аксиоматическое) определение логарифмов. Непрерывность и дифференцируемость всех логарифмов, вычисление производной от логарифма. Теорема существования логарифма и полное описание всех логарифмов. Натуральный логарифм. Основание логарифма. Экспонента (обратная функция к натуральному логарифму).
3. Свойства экспоненты. Определение ряда Тейлора. Ряд Тейлора для экспоненты, его равномерная сходимость на любом ограниченном множестве. Совпадение основания натурального логарифма с числом е. Степень положительного числа с вещественным показателем, совпадение с прежним определением в случае рационального показателя.
4. Степенная и показательная функции, их производные. Дифференциальное уравнение y'=y, его решение. Производные и ряд Маклорена функции $\exp(-1/x^2)$. Примеры бесконечно дифференцируемых функций с компактным носителем. Ряд

Тейлора для функции log(1+x), характер его сходимости. Функция $(1+x)^m$, ее ряд Тейлора («ряд Ньютона»), сходимость.

Период обучения (модуль): **Семестр 2**

№ п/п	Наименование темы (раздела, части)	Вид учебных занятий	Количество часов
1	Векторно-значные функции. Вариация. Тригонометрические функции.	Лекции	16
		практические занятия	6
		в присутствии преподавателя	
		по методическим материалам	14
2	Несобственные интегралы. Суммируемые семейства. Признаки сходимости рядов.	Лекции	12
		практические занятия	6
		в присутствии преподавателя	
		по методическим материалам	20
3	Контрольная работа	контрольная работа	2
4	Равномерная сходимость степенных рядов. Дифференцируемые отображения. Производная по комплексному переменному.	Лекции	10
		практические занятия	4
		в присутствии преподавателя	
		по методическим материалам	8
5	Линейные операторы. Функции нескольких вещественных переменных.	Лекции	20
		практические занятия	10
		в присутствии преподавателя	
		по методическим материалам	20
6	Методы суммирования рядов.	Лекции	6
		практические занятия	2
		в присутствии преподавателя	
		по методическим материалам	20
7	Зачет	промежуточная аттестация (ауд)	2
8	Экзамен	промежуточная аттестация (ауд)	2
		промежуточная аттестация (с.р.)	34

Раздел 1. Векторно-значные функции. Вариация. Тригонометрические функции.

1. Векторно-значные функции ограниченной вариации; спрямляемые пути. Независимость вариации (длины) от параметризации. Аддитивность вариации функции (длины пути) по отрезку. Субаддитивность вариации по функции.
2. Покомпонентный характер условия ограниченности вариации векторно-значной функции. Совпадение класса скалярных функций ограниченной вариации с классом разностей возрастающих функций.
3. Непрерывность вариации в точках непрерывности функции. «Движение без задержки», естественная параметризация спрямляемого пути, представляющего движение без задержки. Длина простой дуги. Число π (длина верхней полуокружности).

4. Интегральная формула для длины непрерывно-дифференцируемого пути (приложение теоремы о согласованной системе оценок). Безостановочное движение (гладкий путь с непрерывной ненулевой производной), формулы для естественной параметризации в случае безостановочного движения.
5. Безостановочное движение по окружности, его направление. Простое вращение (безостановочное движение по окружности с единичной скоростью в положительном направлении, заданное на R принимающее значение 1 в точке 0). Единственность простого вращения.
6. Доказательство существования простого вращения. Простое вращение – (2π)-периодический гомоморфизм аддитивной группы целых чисел в окружность. Бесконечная дифференцируемость простого вращения, ряд Тейлора для него. Определение синуса и косинуса, их производные и ряды Тейлора.
7. Восстановление в правах формул и понятий школьной тригонометрии (несколько примеров). Тангенс и котангенс, их производные. Обратные тригонометрические функции.
8. Степенные ряды для арксинуса и арктангенса. Формулы Эйлера. Экспонента комплексного числа (определение через вещественную экспоненту и простое вращение). Распространение синуса и косинуса в комплексную область.

Раздел 2. Несобственные интегралы. Суммируемые семейства. Признаки сходимости рядов.

1. Несобственные интегралы, абсолютная и условная сходимость, примеры. Сходимость и расходимость интеграла от степенной функции вблизи нуля и бесконечности. Теорема сравнения.
2. Сравнение сумм и интегралов (рядов и несобственных интегралов). Еще раз о рядах из обратных степеней. Постоянная Эйлера.
3. Формула Стирлинга для n! (без вычисления константы в асимптотике). Несобственные интегралы: применения формулы интегрирования по частям.
4. Условно сходящиеся ряды: применение преобразования Абеля, следствия. Теорема Лейбница о перестановках условно сходящегося ряда.
5. Суммируемые семейства - определение. Равносильность суммируемости семейства ограниченности его частичных сумм. Связь суммируемых семейств с абсолютно сходящимися рядами. Перестановки.
6. “Ассоциативный закон” для суммируемых семейств. Произведение абсолютно сходящихся рядов. Степенной ряд для экспоненты в комплексной области. Признаки Даламбера и Коши сходимости ряда.

Раздел 3. Равномерная сходимость степенных рядов. Дифференцируемые отображения. Производная по комплексному переменному.

1. Общее определение степенного ряда (от комплексной переменной), его радиус сходимости. Равномерная сходимость внутри круга сходимости. Переразложение суммы сводящегося степенного ряда в ряд с другим центром.
2. Дифференцируемые отображения. Дифференциал, частные производные, матрица Якоби. Единственность дифференциала. Дифференциал суперпозиции двух дифференцируемых отображений.
3. Дифференцируемость отображения с непрерывными частными производными. Производная по комплексному переменному, голоморфные функции. Связь с дифференцируемыми отображениями плоскости в плоскость, уравнения Коши-Римана, контрпримеры.

4. Стандартные правила для дифференцирования по комплексному переменному (произведение, частное). Голоморфность суммы сходящегося степенного рада, совпадение ряда для производной с продифференцированным рядом, сохранение радиуса сходимости при дифференцировании и взятии комплексной первообразной.
5. Формулы для коэффициентов ряда в терминах комплексных производных от его суммы. Аналитические функции комплексного переменного. Начальные примеры. Изолированность нулей, теорема единственности. Информация об эквивалентности голоморфности и аналитичности.

Раздел 4. Линейные операторы. Функции нескольких вещественных переменных.

1. Дополнительная информация о линейных операторах между евклидовыми пространствами: норма, эквивалентные формулы для нормы; оценки снизу в случае тривиальности ядра; топология и сходимость в пространстве операторов. Открытость множества невырожденных операторов и множества обратимых операторов.
2. Дальнейшие следствия непрерывности частных производных: билипшицевость в случае дифференциала с нулевым ядром. Теорема об обратном отображении.
3. Теорема об обратном отображении: завершение доказательства. Касательный вектор к множеству. Совпадение совокупности касательных векторов к образу невырожденного дифференцируемого отображения в данной точке с областью значений дифференциала. Касательная плоскость.
4. Теорема о неявном отображении: бескоординатная и координатная формы. Множество уровня невырожденного дифференцируемого отображения - гладкое многообразие.
5. Касательные и нормальные векторы к множеству уровнння. Координатная карта, связанная с касательной плоскостью к многообразию (в частности, к множеству уровня). Необходимое условие локального экстремума.
6. Необходимое условие локального экстремума. Условные экстремумы. Метод множителей Лагранжа. Однородные функци, теорема Эйлера.
7. Общая теорема о двойном и повторных пределах и о перестановке предельных переходов. Следствия: общая теорема Стокса-Зайделя, общая теорема о дифференцируемости предельной функции.
8. Частные производные высших порядков, зависимость и независимость от перестановки дифференцирований. Полилинейные отображения и соответствующие им полиформы.
9. Дифференциалы высших порядков для функции от нескольких переменных. Многомерная формула Тейлора.
10. Достаточные критерии локального экстремума, в том числе условного.

Раздел 5. Методы суммирования рядов.

1. Суммирование последовательностей и рядов. Метод Чезаро. Примеры. Регулярные методы. Общие матричные методы, теорема Тёплица для случая неотрицательной матрицы.
2. Метод Абеля-Пуассона, формулы для суммироваия последовательностей и суммирования рядов по Абелю-Пуассону. Регулярность метода Абеля-Пуассона. Сравнение с методом Чезаро.
3. Тауберова теорема Харди для метода Чезаро.

Период обучения (модуль): **Семестр 3**

№ п/п	Наименование темы (раздела, части)	Вид учебных занятий	Количество часов
1	Теория меры.	Лекции	24
		практические занятия	12
		в присутствии преподавателя	
		по методическим материалам	34
2	Контрольная работа	контрольная работа	2
3	Интеграл Лебега. Классы L^p.	Лекции	24
		практические занятия	10
		в присутствии преподавателя	
		по методическим материалам	22
4	Коллоквиум	коллоквиум	4
5	Дифференцирование мер. Меры на многообразиях.	Лекции	12
		практические занятия	6
		в присутствии преподавателя	
		по методическим материалам	26
6	Зачет	промежуточная аттестация (ауд)	2
7	Экзамен	промежуточная аттестация (ауд)	2
		промежуточная аттестация (с.р.)	34

Раздел 1. Теория меры.

1. Основные идеи теории интегрирования по Лебегу. Счетная аддитивность длины на совокупности отрезков. Системы мнножеств: алгебры, σ-алгебры; кольца. Примеры (в частности, σ-алгебра борелевских множеств) . Полукольца. Полукольцо отрезков.
2. Произведение полуколец. Полукольцо прямоугольников. Аддитивные функции множества, меры. Элементарный интеграл (интеграл от неотрицательной ступенчатой функции) по (возможно, и бесконечной) мере на полукольце, его свойства.
3. Произведение (конечно-аддитивных) мер на полукольцах (с использованием элементарного интеграла в доказательстве аддитивности). Элементарный объем. Счетно-аддитивные меры. Пример меры, не являющейся счетно-аддитивной. Регулярные меры, теорма А.Д.Александрова о счетной адитивности регулярных мер. Счетная аддитивность элементарного объема.
4. Стилтьесова длина, ее счетная аддитивность. Предмеры. Внешняя мера - основной пример предмеры. Теорема Лебега-Каратеодори.
5. Теорема Лебега-Каратеодори (продолжение и завершение). Мера Лебега в евклидовом пространстве. Меры Лебега-Стилтьеса. Структура измеримых множеств.
6. Структура измеримых множеств (продолжение и завершение доказательств). Теоремы о единственности продолжения по Лебегу-Каратеодори.
7. Инвариантность меры Лебега относительно сдвига. Пример неизмеримого множества. (Почти) единственность меры, инвариантной относительно сдвига.
8. Измеримые отображения: определение и общие свойства. Суперпозиции измеримых отображений. σ-Алгебра борелевских множеств, ее порождающие подсистемы. Порождающие системы для σ-алгебры борелевских множеств на прямой. Измеримость по Борелю непрерывного отображения. Покоординатный характер измеримости отображения со значениями в евклидовом пространстве.

Арифметические операции над измеримыми функциями.
9. Измеримость счетных супремумов и инфимумов измеримых функций. Сохранение измеримости при сходимости всюду и почти всюду. Равномерное приближение измеримой функции ступенчатыми со счетным числом ступеней и поточечное - простыми.
10. Образ множеств меры нуль при липшицевом отображении. Преобразование меры Лебега при линейном отображении.
11. Малая теорема Леви: предел интегралов от возрастающей последовательности неотрицательных простых функций, сходящейся п.в. к характеристической функции измеримого множества. Определение интеграла от неотрицательной измеримой функции, его монотонность.
12. Теорема Леви для возрастающих последовательностей неотрицательных измеримых функций. Аддитивность и положительная однородность интеграла. Интеграл от неотрицательной аддитивной функции по измеримому множеству; счетная аддитивность интеграла по множеству. Интеграл от знакопеременных (и от комплексных) измеримых функций, его линейность и монотонность.

Раздел 2. Интеграл Лебега. Классы L^p.

1. Суммируемые функции, σ-конечность носителя суммируемой функции, класс L^1, метрика в нем. Плотность простых функций в L^1. Абсолютная непрерывность интеграла от суммируемой функции.
2. Теорема Леви для функций произвольного знака. Лемма Фату. Сходимость по мере. Взаимоотношение сходимости по мере и сходимости почти всюду. Теорема Лебега о предельном переходе под знаком интеграла.
3. Теорема Лебега о предельном переходе под знаком интеграла (окончание). Следствие: теорема Лебега о мажорированной сходимости. Достаточные условия непрерывности и дифференцируемости интеграла по парамеру.
4. Классы L^p (включая $p=\infty$). Неравенства Гёльдера и Минковского, метрика в L^p. Плотность простых функций в L^p (и вариант с простыми функциями, отвечающими порождающей подалгебре, при конечном p).
5. Полнота пространства L^p. Произведение счетно аддитивных мер: его счетная аддитивность. Теорема Тонелли.
6. Теорема Тонелли (окончание). Теорема Фубини. Образ меры при измеримом отображении, формулы для интералов. Функция распределения, формула для интеграла в терминах функции распределения.
7. Формула интегрирования по частям, вторая функция распределения, выражение интегралов через нее.
8. Свертка: существование, основные оценки. Коммутативность свертки. Носитель свертки. Непрерывность сдвигов в пространстве $L^p(R^n)$. Аппроксимативные единицы, порожденные суммируемой функцией, их простые свойства.
9. Приближение свертками с аппроксимативной единицей. Приближение бесконечно дифференцируемыми функциями (с компактным носителем).
10. (Конечные) знакопеременные и комплексные меры. Ограниченность множества значений. Разложение Хана. Разложение Рисса. Интеграл по комплексной мере, основные свойства.
11. Абсолютная непрерывность и сингулярность, теорема Радона-Никодима (доказательство откладывается до изучения гильбертовых пространств в курсе ФА), разложение Лебега на абсолютно непрерывную и сингулярную части. Случай мер Лебега-Стилтьеса на прямой. Канторова лестница.
12. Интегрирование по мере, обладающей плотностью. Полная вариация меры: определение. Вычисление полной вариации для случая меры с плотностью. Следствие:

счетная аддитивность полной вариации в общем случае. Плотность комплексной меры относительно ее полной вариации.

Раздел 3. Дифференцирование мер. Меры на многообразиях.

1. Максимальная функция Харди-Литлвуда. Лемма Винера о покрытии. Слабый тип (1,1) для оператора максимальной функции.Неравенство Колмогорова и оценки максимального оператора в L^p.
2. Дифференцирование абсолютно непрерывных мер (доказательство через максимальную функцию). Информация о дифференцировании сингулярных мер. Дифференцирование монотонных функций.
3. Преобразование меры при невырожденном дифференцируемом отображении (доказательство с помощью теоремы о дифференцировании абсолютно непрерывной меры). Пример: полярные координаты. Вычисление интеграла Гаусса.
4. Лебегова мера на подмногообразиях в n-мерном евклидовом пространстве: эвристические соображения - случай k-плоскости L и невырожденного линейного отображения $A{:}R^k \to L$, определитель Грама. Меры Хаусдорфа: определение соответствующих предмер, размерность множества по Хаусдорфу.
5. Применение теоремы Лебега-Каратеодори, доказательство измеримости всех борелевских множеств по любой мере Хаусдорфа. Образ меры Хаусдорфа при отображении, обратном к липшицеву, оценки.
6. Пропорциональность k-меры Хаусдорфа k-мерной мере Лебега на k-плоскостях при целом k. Определение k-мерной меры Лебега в n-мерном евклидовом пространстве.

Период обучения (модуль): **Семестр 4**

№ п/п	Наименование темы (раздела, части)	Вид учебных занятий	Количество часов
1	Дифференциальные формы	Лекции	6
		практические занятия	8
		в присутствии преподавателя	
		по методическим материалам	20
2	Функции комплексного переменного	Лекции	58
		практические занятия	22
		в присутствии преподавателя	
		по методическим материалам	60
3	Зачет	промежуточная аттестация (ауд)	2
4	Экзамен	промежуточная аттестация (ауд)	2
		промежуточная аттестация (с.р.)	36

Раздел 1. Дифференциальные формы.

1. Интеграл линейной дифференциальной формы вдоль гладкого пути. Простейшие свойства. (Не)зависимость от параметризации. Первообразная дифференциальной формы, интеграл в случае наличия первообразной.
2. Обращение в нуль интегралов по замкнутому пути и существование превообразной, глобальный и локальный варианты (доказательство в двумерном случае). Условие локального существования первообразной для форм с коэффициентами класса C^1, теорема Остроградского-Гаусса для прямоугольника. Замкнутые и точные формы.
3. Формы dz и $d\bar{z}$, операторы ∂ и $\bar{\partial}$, запись диференциала функции от двух

переменных в их терминах. Уравнения Коши-Римана в терминах оператора $\bar{\partial}$. Замкнутость формы f(z)dz в случае, когда f - голоморфная функция в области и производная ∂f непрерывна. Форма dz/(z-a) -замкнутая, но не точная в плоскости с выколотой точкой a, вычисление ее интеграла по стандартной окружности $g(t)=a+Re^{it}$, t\in [0, 2π]. Вычисление интегала по любой окружности $b+Re^{it}$, не проходящей через a.

Раздел 2. Функции комплексного переменного.

1. Теорема Коши: замкнутость дифференциальной формы f(z)dz в для голоморфной функции f без предположения о непрерывности производной ∂f. Теорема об устранимой особенности для точных дифференциальных форм в случае непрерывных коэффициентов.
2. Малая интегральная формула Коши. Разложение голоморфной функции в степенной ряд, формулы для коэффициентов. Эквивалентность голоморфности и аналитичности. Теорема Морера. Напоминание: теорема единственности.
3. Теорема Лиувилля. Пример: доказательство основной теоремы алгебры. Теорема о среднем. Принцип максимума модуля. Гармонические функции двух переменных и теорема о среднем для них.
4. Первообразная замкутой дифференциальной формы вдоль (произвольного непрерывного) пути, существование и единственность с точностью до аддитивной константы. Интеграл от замкнутой дифференциальной формы вдоль произвольного пути. Корректность определения. Совпадение результата со старым определеникем, если путь гладкий.
5. Случай формы вида f(z)dz с голоморфной функцией f, две формулы замены переменной (изменение параметризации и голоморфная подстановка) в интеграле от нее вдоль произвольного пути. Первообразная замкнутой формы вдоль гомотопии.
6. Равенство интегралов от замкнутой дифференциальной формы по гомотопным замкнутым путям. Точность замнкутых форм в односвязной области. Существование и почти-единственность гармонически сопряженной функции в односвязной области.
7. Функции, аналитические в кольце, разложение в ряд Лорана, формулы для коэффициентов. Главная и регулярная части ряда Лорана. Изолированные особые точки, их классификация. Устранимость особенности, в окрестности которой функция ограничена. Существенные особенности и теорема Сохотского.
8. Характеризация полюсов. Порядок полюса, кратность нуля. Связь между порядком полюса у функции f и порядком нуля у функции 1/f. Кратные нули и нули производных. Вычет, формулы для вычисления вычета. Индекс замкнутого пути относительно точки (определение в форме интегрла, информация о целочисленности и интуитивном смысле, доказательства откладываются). Теорема Коши о вычетах.
9. Примеры вычисления несобственных интегралов с помощью вычетов. Функции, аналитические в окрестности бесконечности, вычет в бесконечности. Теорема о сумме всех вычетов.
10. Ветви логарифма и аргумента в области, существование в любой однсвязной области, не содержащей нуля, связь между разными ветвями логарифма (аргумента). Примеры. Ветвь логарифма (аргумента) аналитической функции, достаточное условие существования.
11. Ветвь логарифма (аргумента) аналитической функции вдоль пути.

Приращение логарифма (аргумента) вдоль пути. Случай замкнутого пути, целочисленность индекса, объяснение, почему это - "число обходов". Постоянство индекса на связных компонентах дополнения носителя замкнутого пути и его равенство нулю в неограниченной компоненте. Напоминание из топологии: теорема Жордана.

12. Принцип аргумента и теорема Руше. Нормальная сходимость аналитических функций - определение. Первая теорема Вейерштраса о нормальной сходимости.
13. Вторая теорема Вейерштраса о нормальной сходимости аналитических функций. Предел функций без нулей. Определение однолистной функции и предел однолистных функций.
14. Пространство аналитических функций в области G как подпространство локально-выпуклого пространства $C^{\infty}(G)$. Следствие: относительно компактные множества в пространстве аналитических функций (теорема Монтеля). Отсутствие нулей у производной однолистной функции.
15. Однолистность и конформность. Дробно-линейные отображения. Примеры отображения полуплоскости на круг и круга на себя.
16. Теорема Римана об однолистном отображении произвольной односвязной области, отличной от комплексной плоскости, на круг.
17. Лемма Шварца. Автоморфизмы комплексной плоскости, расширенной комплексной плоскости и круга. Еще о дробно-линейных отображениях.
18. Бесконечные произведения. Сведение вопроса о сходимости к вопросу о сходимости ряда из логарифмов.
19. Построение целой функции с заданными нулями (произведение Вейерштраса). Определение мероморфной функции, представление мероморфной функции в виде отношения двух целых функций.
20. Канонические множители Вейерштраса в случае достаточно быстрого убегания нулей к бесконечности. Теорема Миттаг-Леффлера.
21. Разложение синуса в произведение. Разложение котаненса в ряд простых дробей. Вычисление суммы обратных квадратов натуральных чисел.
22. Порядок и тип целой функции. Связь с ростом нулей.
Гамма-функция Эйлера: определение в виде бесконечного произведения, варианты. Простые формулы (удвоение, логарифмическая производная).
23. Единственность функции на вещественной оси с выпуклым логарифмом, удовлетворяющей функциональному уравнению для гамма-функции. Представление гамма-функции в виде интеграла. Еще одно вычисление интеграла Гаусса.
24. Асимптотика для гамма-функции в комплексной области (формула Стирлинга), с вычислением константы в асимптотике.
25. Аналитическое продолжение. Элементарное продолжение через граничную точку.
26. Непродолжимая функция (теорема Адамара). Метод продолжения: переразложение степенного ряда.
27. Элемент аналитической функции. Еще методы: продолжение вдоль цепочки областей, вдоль пути; их эквивалентность. Полная аналитическая функция. Точки ветвления, примеры.
28. Понятие о римановой поверхности, примеры. Принцип симметрии Римана-Шварца.
29. Теорема Фрагмена-Линделефа.

Раздел 3. Обеспечение учебных занятий

3.1. Методическое обеспечение
3.1.1 Методические указания по освоению дисциплины

Посещение лекций и практических занятий

3.1.2 Методическое обеспечение самостоятельной работы

Основная и дополнительная литература

3.1.3 Методика проведения текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации и критерии оценивания

Методика проведения зачета
Зачет проводится в устной форме. Для получения зачета необходимо решить 60% задач, предлагаемых в течение семестра. В случае, если к моменту проведения зачета студент решил меньшее количество задач, на зачете ему предлагаются задачи аналогичные по тематике и сложности. Задачи даются в форме домашних заданий с устной сдачей («листочки»), письменных домашних заданий и контрольных. Темы задач фиксированы, количество и форма выдачи остается на усмотрение преподавателя практических занятий. Возможна выдача задач повышенной сложности, решение которых засчитывается в качестве индивидуальных достижений студента (при подаче заявок на именные стипендии, конкурсы и т.п.); сдача таких заданий проводится в устной форме.

Методика проведения экзамена
Экзамен проводятся в устной форме. Билет состоит из двух вопросов. Время подготовки ответа на вопросы билета составляет 60 минут.
Использование конспектов и учебников, а также электронных устройств хранения, обработки или передачи информации при подготовке и ответе на вопросы экзамена категорически запрещено. В случае обнаружения факта использования недозволенных материалов (устройств) составляется акт и студент удаляется с экзамена. После ответа на вопросы билета преподаватель задает несколько дополнительных вопросов, на основании оценки ответов на которые итоговая оценка по предмету может быть повышена или понижена.
Критерии выставления оценок
Оценка «отлично» ставится за полностью раскрытый теоретический материал и правильные ответы на дополнительные вопросы преподавателя. В болонской шкале оценка может быть скорректирована в ту или иную сторону с учетом малозначительных погрешностей изложения или, напротив, углубленного изложения материала.
Оценка «хорошо» ставится за изложенный теоретический материал билета (возможно с помощью наводящих подсказок преподавателя).
Оценка «удовлетворительно» ставится за знание основных вопросов по каждой теме.
Оценка «неудовлетворительно» выставляется, если не выполняются условия для получения оценок «отлично», «хорошо» и «удовлетворительно».

3.1.4 Методические материалы для проведения текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации (контрольно-измерительные материалы, оценочные средства)

Период обучения (модуль): **Семестр 1**

Темы **задач**:

1. Пределы последовательностей. Замечательные пределы. Нижние и верхние грани. Неравенства. Непрерывность.

2. Исследование функций. Графики. Параметризация кривых. Выпуклость. Неявные функции.

3. Сходимость числовых рядов. Ряды Тейлора. Абсолютная сходимость. Равномерная сходимость.

4. Вычисление интегралов одной переменной. Площадь. Объем тел вращения. Длина кривой. Сходимость интегралов.

Период обучения (модуль): **Семестр 2**

Темы **задач**:

1. Выпуклость функций. Неравенства на выпуклость. Метод Ньютона.

2. Кратные интегралы. Дифференцируемость функций многих переменных. Экстремальные задачи. Метод множителей Лагранжа.

3. Асимптотика интегралов зависящих от параметра. Дифференцирование под знаком интеграла. Методы суммирования рядов.

4. Аналитические функции. Функция Жуковского. Дробно-линейные преобразования. Конформные отображения.

Период обучения (модуль): **Семестр 3**

Темы **задач**:

1. Меры множеств. Суммируемость функций. Интеграл Лебега. Равномерная сходимость степенных рядов.

2. Формула интегрирования по частям. Свертка. Неравенства Гельдера и Минковского.

3. Максимальные функции. Оценки сингулярных интегральных операторов. Дифференцирование мер.

4. Меры Хаусдорфа. Преобразование мер. Преобразование Гильберта.

Период обучения (модуль): **Семестр 4**

Темы **задач**:

1. Замкнутость и точность форм. Вычисление интеграла по контуру. Формула Коши.

2. Особенности аналитических функций. Мероморфные функции. Формулы для вычисления вычетов.

3. Вычисление несобственных интегралов при помощи вычетов. Принцип аргумента. Теорема Руше.

4. Однолистные функции. Построения целых функций. Канонические произведения.

3.1.5 Методические материалы для оценки обучающимися содержания и качества учебного процесса

3.2. Кадровое обеспечение

3.2.1 Образование и (или) квалификация штатных преподавателей и иных лиц, допущенных к проведению учебных занятий

К чтению лекций должны привлекаться преподаватели, имеющие ученую степень доктора или кандидата наук (в том числе степень PhD, прошедшую установленную процедуру признания и установления эквивалентности) и/или ученое звание профессора или доцента.

3.2.2 Обеспечение учебно-вспомогательным и (или) иным персоналом

не требуется

3.3. Материально-техническое обеспечение

3.3.1 Характеристики аудиторий (помещений, мест) для проведения занятий

Стандартно оборудованные лекционные аудитории, должны вмещать поток в соответствии со списком студентов

3.3.2 Характеристики аудиторного оборудования, в том числе неспециализированного компьютерного оборудования и программного обеспечения общего пользования

доска для письма мелом или фломастером

3.3.3 Характеристики специализированного оборудования

не требуется

3.3.4 Характеристики специализированного программного обеспечения

не требуется

3.3.5 Перечень и объёмы требуемых расходных материалов

Мел — не менее 1 куска на час лекционных занятий, фломастеры для доски, губка

3.4. Информационное обеспечение

3.4.1 Список обязательной литературы

1. В. А. Зорич, “Математический анализ”, – М.: МЦНМО, 2012
2. О.Л. Виноградов, А.Л. Громов, “Курс математического анализа” - Изд-во С.-Петерб. ун-та, 2009

3.4.2 Список дополнительной литературы

1. Г.М. Фихтенгольц, “Курс дифференциального и интегрального исчисления”, - СПб, Лань, 2009
2. В.П. Хавин, “Основы математического анализа. Дифференциальное и интегральное исчисление функций одной вещественной переменной”, - СПб, Лань, 1998.
3. Рудин У. 'Основы математического анализа' \\Перевод с англ. Хавина В.П. - Москва: Мир, 1976

3.4.3 Перечень иных информационных источников

не предусмотрен

Раздел 4. Разработчики программы

Кисляков Сергей Владимирович, член-корреспондент РАН, профессор, директор ПОМИ РАН, skis@pdmi.ras.ru