

**Санкт-Петербургский государственный университет**

**РАБОЧАЯ ПРОГРАММА  
УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ**

«Теория графов (осн курс) тр 6 сем».  
«Graph Theory»

**Язык(и) обучения**

русский

Трудоемкость в зачетных единицах: 4

Регистрационный номер рабочей программы: 053657

## **Раздел 1. Характеристики учебных занятий**

### **1.1. Цели и задачи учебных занятий**

Обучение студентов основным методам дискретной математики; развитие у студентов комбинаторного, алгоритмического, логического мышления. Ознакомление с классическими и современными результатами в дискретной математике и развитие навыков их применения, в том числе в других областях математики.

### **1.2. Требования подготовленности обучающегося к освоению содержания учебных занятий (пререквизиты)**

Владение курсом «Теоретическая информатика».

### **1.3. Перечень результатов обучения (learning outcomes)**

Знать содержание дисциплины «Теория графов» и иметь достаточно полное представление о возможностях её в других разделах математики и в приложениях; иметь представление о структурах теории графов и основных комбинаторных методах доказательства и уметь применять эти методы, в том числе и в других дисциплинах

### **1.4. Перечень и объём активных и интерактивных форм учебных занятий**

Промежуточная аттестация (экзамен) 4 часа, семинары 30 часов.

## Раздел 2. Организация, структура и содержание учебных занятий

### 2.1. Организация учебных занятий

#### 2.1.1 Основной курс

Трудоёмкость, объёмы учебной работы и наполняемость групп обучающихся																	
Код модуля в составе дисциплины, практики и т.п.	Контактная работа обучающихся с преподавателем											Самостоятельная работа				Объём активных и интерактивных форм учебных занятий	Трудоёмкость
	лекции	семинары	консультации	практические занятия	лабораторные работы	контрольные работы	коллоквиумы	текущий контроль	промежуточная аттестация	итоговая аттестация	под руководством преподавателя	в присутствии преподавателя	сам. раб. с использованием методических материалов	текущий контроль (сам.раб.)	промежуточная аттестация (сам.раб.)		
<b>ОСНОВНАЯ ТРАЕКТОРИЯ</b>																	
<b>очная форма обучения</b>																	
Семестр 6	30	30	2					2				48		32		34	4
	2-50	2-25	2-50					2-50				1-1		1-1			
ИТОГО	30	30	2					2				48		32		34	4

Виды, формы и сроки текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации						
Код модуля в составе дисциплины, практики и т.п.	Формы текущего контроля успеваемости		Виды промежуточной аттестации		Виды итоговой аттестации (только для программ итоговой аттестации и дополнительных образовательных программ)	
	Формы	Сроки	Виды	Сроки	Виды	Сроки
<b>ОСНОВНАЯ ТРАЕКТОРИЯ</b>						
<b>очная форма обучения</b>						
Семестр 6			экзамен, устно, традиционная форма	по графику промежуточной аттестации, по графику промежуточной аттестации		

## 2.2. Структура и содержание учебных занятий

Период обучения (модуль): Семестр 6

№ п/п	Наименование темы (раздела, части)	Вид учебных занятий	Количество часов
1	Пути и циклы в графе	Лекции	4
		семинары	4
		в присутствии преподавателя	
		по методическим материалам	6
2	Паросочетания	Лекции	3
		семинары	3
		в присутствии преподавателя	
		по методическим материалам	5
3	Раскраски графов	Лекции	4
		семинары	4
		в присутствии преподавателя	
		по методическим материалам	6
4	Связность	Лекции	4
		семинары	4
		в присутствии преподавателя	
		по методическим материалам	6
5	Планарные графы.	Лекции	3
		семинары	3
		в присутствии преподавателя	
		по методическим материалам	5
6	Ориентированные графы и сети	Лекции	6
		семинары	6
		в присутствии преподавателя	
		по методическим материалам	8
7	Экстремальные задачи	Лекции	4
		семинары	4
		в присутствии преподавателя	
		по методическим материалам	6
8	Графы и многочлены	Лекции	4
		семинары	4
		в присутствии преподавателя	
		по методическим материалам	6
9	Экзамен	промежуточная аттестация (ауд)	2
		промежуточная аттестация (с.р.)	32

### Модуль 1. Пути и циклы в графе

Эйлеров путь и цикл. Существование Гамильтонова пути и цикла: классические критерии Оре и Дирака, метод замыкания, теоремы Хватала. Критерий существования

гамильтонова цикла через связность. Теорема Бонди о панциклическом графе. Теорема Татта о существовании однородного графа степени  $s$  с данными степенью и обхватом.

## **Модуль 2. Паросочетания**

Максимальное паросочетание и дополняющие пути: теорема Бержа.

Независимые и доминирующие множества, паросочетания и покрытия в графе: Теорема Галлаи. Паросочетания с предпочтениями. Теорема Гэйла-Шепли. Совершенные паросочетания в однородном графе. Дефицит графа. Формула Бержа.

## **Модуль 3. Раскраски графов**

Существование правильной раскраски в  $k$  цветов вершин  $k$ -редуцируемого графа. Конструкция графа с произвольным хроматическим числом без треугольников. Совершенные графы: слабая гипотеза Бержа - теорема Ловаса. Хроматический и покрывающий индексы графа: теоремы Визинга и Гупты.

## **Модуль 4. Связность**

Теоремы Гёринга, Менгера и Уитни. Удаление вершины с сохранением  $k$ -связности. Удаление ребер с сохранением  $k$ -связности: теоремы Мадера. Стягивание ребра в двусвязном и трёхсвязном графе без уменьшения связности.

## **Модуль 5. Планарные графы**

Теорема Куратовского. Двойственный граф, триангуляция графа. Тэйтовы раскраски, эквивалентность Тэйта: вокруг теоремы о 4 красках.

## **Модуль 6. Ориентированные графы и сети**

Существование гамильтонова цикла в сильно связном турнирном графе. Удаление вершин из сильно связного турнирного графа с сохранением сильной связности. Теорема Редди. Циклы в сильно связных турнирных графах. Теоремы Муна. Теорема Хватала-Ловаса о независимом множестве в ориентированном графе. Теорема Галлаи-Мильграма и теорема Дилворса. Теорема Роя-Галлаи о раскрасках и ориентациях. Теорема Гэльвина о списочных рёберных раскрасках двудольного графа. Сети и потоки: Теорема Менгера как следствие теоремы Форда-Фалкерсона.

## **Модуль 7. Экстремальные задачи**

Оценка количества рёбер в графе, удовлетворяющем наследственному свойству. Графы без клики на  $n$  вершинах: теорема Турана. Оценка сверху количества рёбер в графе без полного двудольного подграфа. Проективная плоскость над конечным полем и графы без циклов длины 4. Конечные поля и графы без  $K_{2,n}$ .

## **Модуль 8. Графы и многочлены**

Хроматический многочлен графа. Смысл кратности корней 0 и 1 хроматического многочлена. Многочлен Татта. Корректность определения и связь с ранговым

многочленом Уитни. Значения полинома Татта: количество остовных лесов и остовных подграфов с минимальным количеством компонент связности, количество ациклических подграфов. Универсальное свойство многочлена Татта. Связь с хроматическим многочленом.

### **Раздел 3. Обеспечение учебных занятий**

#### **3.1. Методическое обеспечение**

##### **3.1.1 Методические указания по освоению дисциплины**

Посещение лекций и семинаров

##### **3.1.2 Методическое обеспечение самостоятельной работы**

Основная и дополнительная литература

##### **3.1.3 Методика проведения текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации и критерии оценивания**

###### **Методика проведения экзамена**

Экзамен проводится в устной форме. Билет состоит из двух вопросов. Время подготовки ответа на вопросы билета составляет 60 минут.

Использование конспектов и учебников, а также электронных устройств хранения, обработки или передачи информации при подготовке и ответе на вопросы экзамена категорически запрещено. В случае обнаружения факта использования недозволённых материалов (устройств) составляется акт и студент удаляется с экзамена. После ответа на вопросы билета преподаватель задает несколько дополнительных вопросов, на основании оценки ответов на которые итоговая оценка по предмету может быть повышена или понижена.

###### **Критерии выставления оценок**

Оценка «отлично» ставится за полностью раскрытый теоретический материал и правильные ответы на дополнительные вопросы преподавателя. В болонской шкале оценка может быть скорректирована в ту или иную сторону с учетом малозначительных погрешностей изложения или, напротив, углубленного изложения материала.

Оценка «хорошо» ставится за изложенный теоретический материал билета (возможно с помощью наводящих подсказок преподавателя).

Оценка «удовлетворительно» ставится за знание основных вопросов по каждой теме.

Оценка «неудовлетворительно» выставляется, если не выполняются условия для получения оценок «отлично», «хорошо» и «удовлетворительно».

##### **3.1.4 Методические материалы для проведения текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации (контрольно-измерительные материалы, оценочные средства)**

Период обучения (модуль): **Семестр 5**

###### **Список вопросов к экзамену:**

1. Дерево.
2. Двудольный граф.
3. Эйлеров путь и цикл в графе.

4. Существование Гамильтонова пути и цикла: классические критерии Оре и Дирака.
5. Существование Гамильтонова пути и цикла: метод замыкания, теоремы Хватала.
6. Теоремы Хватала о гамильтоновых последовательностях.
7. Критерий существования гамильтонова цикла через связность.
8. Теорема Бонди о панциклическом графе.
9. Теорема Татта о существовании однородного графа степени  $k$  с обхватом  $g$ .
10. Максимальное паросочетание и дополняющие пути: теорема Бержа.
11. Теорема Холла.
12. Теорема Кёнига.
13. Независимые и доминирующие множества, паросочетания и покрытия в графе. Теорема Галлаи.
14. Паросочетания с предпочтениями. Теорема Гэйла-Шепли.
15. Теорема Татта о совершенном паросочетании.
16. Теорема Петерсена о совершенном паросочетании в однородном графе степени 3.
17. Теорема Плешника о совершенном паросочетании в однородном графе.
18. Теорема Петерсена о выделении 2-фактора в  $2k$ -регулярном графе.
19. Дефицит графа. Формула Бержа.
20. Фактор-критические графы. Теорема Галлаи.
21. Существование правильной раскраски в  $k$  цветов вершин  $k$ -редуцируемого графа.
22. Хроматический полином графа и его свойства.
23. Теорема Брукса: доказательство методом чередующихся цепей.
24. Теорема Брукса: доказательство с использованием связности.
25.  $k$ -критические графы. Свойства, теорема Дирака.
26. Гипотеза Хайоша, случай  $k=4$ .
27. Конструкция графа с произвольным хроматическим числом без треугольников.
28. Теорема Эрдеша.
29. Совершенные графы. Слабая гипотеза Бержа - теорема Ловаса.
30. Оптимальные раскраски ребер и их свойства. Реберное хроматическое число двудольного графа.
31. Теорема Визинга.
32. Теорема Гупты.
33. Точки сочленения и блоки в связном графе. Дерево блоков и точек сочленения.
34. Теоремы Гёринга, Менгера и Уитни.
35. Разделяющие множества в  $k$ -связном графе, части разбиения, фрагменты. Внутренность и граница части разбиения.
36. Зависимые и независимые  $k$ -разделяющие множества. Простейшие свойства. Разбиение графа парой зависимых  $k$ -разделяющих множеств.
37. Удаление вершины с сохранением  $k$ -связности.
38. Удаление ребер с сохранением  $k$ -связности. Теоремы Мадера.
39. Стягивание ребра в трёхсвязном графе без потери трёхсвязности.
40. Планарные графы. Теорема Эйлера и ее следствия.
41. Теорема Куратовского.
42. Двойственный граф.
43. Триангуляция графа.
44. Тэйтовы раскраски, эквивалентность Тэйта.
45. Теорема Томассена о списочной 5-раскрашиваемости планарного графа.

46. Теорема Гринберга о гамильтоновом планарном графе. Контрпримеры к гипотезе Тэйта.
47. Компоненты сильной связности ориентированного графа, их свойства.
48. Минимальные сильно связанные графы. Оценки на число стрелок.
49. Существование гамильтонова цикла в сильно связном турнирном графе.
50. Удаление вершин из сильно связного турнирного графа с сохранением сильной связности.
51. Теорема Редди.
52. Циклы в сильно связных турнирных графах. Теоремы Муна.
53. Теорема Хватала-Ловаса о независимом множестве в ориентированном графе.
54. Теорема Галлаи-Мильграма и теорема Дилворса.
55. Теорема Роя-Галлаи о раскрасках и ориентациях.
56. Ядро орграфа. Критерий раскрашиваемости графа в терминах ядер ориентаций.
57. Теорема Гэльвина о списочных рёберных раскрасках двудольного графа.
58. Сети и потоки. Лемма о разрезе сети.
59. Теорема Форда-Фалкерсона.
60. Целочисленные сети. Целый максимальный поток в целочисленной сети.
61. Реберная теорема Менгера как следствие теоремы Форда-Фалкерсона.
62. Двумерные числа Рамсея: оценки сверху для случая двух и более цветов.
63. Оценка снизу на двумерные числа Рамсея.
64. Многомерные числа Рамсея: доказательство конечности.
65. Оценка количества рёбер в графе, удовлетворяющем наследственному свойству.
66. Графы без  $K_n$ : теорема Турана, единственность экстремального графа.
67. Проективная плоскость над конечным полем и графы без циклов длины 4.
68. Количество остовных деревьев: теоремы Кэли.
69. Оценка количества листьев в остовном дереве связного графа с минимальной степенью вершины  $\sim 3$ .
70. Максимальные наборы из  $k$  непересекающихся по рёбрам лесов в графе  $G$ . Лемма о связанном множестве.
71. Теоремы Нэша-Уильямса.
72. Кратность корня 0 хроматического многочлена графа.
73. Кратность корня 1 хроматического многочлена графа.
74. Многочлен Татта. Корректность определения и связь с ранговым многочленом Уитни.
75. Значения полинома Татта: количество остовных лесов и остовных подграфов с минимальным количеством компонент связности, количество ациклических подграфов.
76. Универсальное свойство многочлена Татта. Связь с хроматическим многочленом.

**Темы докладов на семинаре:**

1. Применения теоремы Холла.
2. Паросочетания и дефицит графа.
3. Правильные раскраски графов с дополнительными условиями. Правильные раскраски гиперграфов.
4. Плоские графы и графы с ограничением на число пересечений.
5. Вычисление хроматических многочленов некоторых видов графов.
6. Применение многочлена Татта.

7. Остовные деревья.
8. Циклы в графах большой связности. Разделяющие множества в графах большой связности.
9. Циклическое пространство графа и его применение.
10. Дискриминант графа.
11. Связь наибольшей длины цикла в графе с количеством ребер.
12. Барьеры.
13. Восстановление графа: вокруг гипотезы Улама.
14. Теорема Рамсея и ее применение.
15. Экстремальные задачи теории графов.

### **3.1.5 Методические материалы для оценки обучающимися содержания и качества учебного процесса**

### **3.2. Кадровое обеспечение**

#### **3.2.1 Образование и (или) квалификация штатных преподавателей и иных лиц, допущенных к проведению учебных занятий**

К чтению лекций должны привлекаться преподаватели, имеющие ученую степень доктора или кандидата наук (в том числе степень PhD, прошедшую установленную процедуру признания и установления эквивалентности) и/или ученое звание профессора или доцента.

#### **3.2.2 Обеспечение учебно-вспомогательным и (или) иным персоналом**

не требуется

### **3.3. Материально-техническое обеспечение**

#### **3.3.1 Характеристики аудиторий (помещений, мест) для проведения занятий**

Стандартно оборудованные лекционные аудитории, должны вмещать поток в соответствии со списком студентов

#### **3.3.2 Характеристики аудиторного оборудования, в том числе неспециализированного компьютерного оборудования и программного обеспечения общего пользования**

доска для письма мелом или фломастером

#### **3.3.3 Характеристики специализированного оборудования**

не требуется

#### **3.3.4 Характеристики специализированного программного обеспечения**

не требуется

#### **3.3.5 Перечень и объёмы требуемых расходных материалов**

Мел — не менее 1 куса на час лекционных занятий, фломастеры для доски, губка

### **3.4. Информационное обеспечение**

### **3.4.1 Список обязательной литературы**

1. О.Оре. «Теория графов». Москва, Мир, 1969.
2. К.Берж. «Теория графов и ее применение». Москва, изд.иностранной литературы, 1962.
3. Ф.Харари. « Теория графов» М, Наука, 1973.

### **3.4.2 Список дополнительной литературы**

1. Д.В.Карпов. «Теория графов». [http://logic.pdmi.ras.ru/~dvk/graphs\\_dk.pdf](http://logic.pdmi.ras.ru/~dvk/graphs_dk.pdf)

### **3.4.3 Перечень иных информационных источников**

1. J.A.Bondy, U.S.R. Murty. «Graph Theory with applications.» North-Holland, New York, 1974.
2. R.Diestel. «Graph Theory». Springer-Verlag, 2005

## **Раздел 4. Разработчики программы**

Карпов Дмитрий Валерьевич, доктор физ.-мат. наук, старший научный сотрудник ПОМИ РАН, доцент СПбГУ