

Санкт-Петербургский государственный университет

**РАБОЧАЯ ПРОГРАММА
УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ**

Математическая физика
Mathematical physics

Язык(и) обучения

русский

Трудоемкость в зачетных единицах: 6

Регистрационный номер рабочей программы: 043602

Раздел 1. Характеристики учебных занятий

1. Цели и задачи учебных занятий

Сообщение сведений о динамических системах в объеме, необходимом для общего развития и изучения смежных дисциплин физико-математического цикла. Усвоение основных идей, понятий и фактов математической физики.

1.2. Требования подготовленности обучающегося к освоению содержания учебных занятий (пререквизиты)

Не предусмотрены.

1.3. Перечень результатов обучения (learning outcomes)

Обучающийся должен овладеть теоретическим материалом в объеме, предусмотренном программой, уметь применять полученные знания при решении теоретических и прикладных задач, на основе анализа освоенных разделов: фундаментальные решения, уравнения Лапласа и Гельмгольца, теория потенциала, задача Штурма-Лиувилля, метод Фурье, пространства гладких функций в области, теоремы вложения, многообразия.

1.4. Перечень и объём активных и интерактивных форм учебных занятий

практические занятия 36 часов, контрольные работы 4 часа, промежуточная аттестация (зачеты и экзамены) 6 часов

Раздел 2. Организация, структура и содержание учебных занятий

2.1. Организация учебных занятий

2.1.1 Основной курс

Трудоёмкость, объёмы учебной работы и наполняемость групп обучающихся																		
Код модуля в составе дисциплины, практики и т.п.	Контактная работа обучающихся с преподавателем											Самостоятельная работа				Объём активных и интерактивных форм учебных занятий	Трудоёмкость	
	лекции	семинары	консультации	практические занятия	лабораторные работы	контрольные работы	коллоквиумы	текущий контроль	промежуточная аттестация	итоговая аттестация	под руководством преподавателя	в присутствии преподавателя	сам. раб. с использованием методических материалов	текущий контроль (сам.раб.)	промежуточная аттестация (сам.раб.)			итоговая аттестация (сам.раб.)
ОСНОВНАЯ ТРАЕКТОРИЯ																		
очная форма обучения																		
Семестр 5	30			12		4	2		2				56		2		16	3
	2-50			10-25		10-25	1-1		2-50				1-1		1-1			
Семестр 6	32		2	24					4				18		28		30	3
	2-50		2-50	10-25					2-50				1-1		1-1			
ИТОГО	62		2	36		4	2		6				74		30		46	6

Виды, формы и сроки текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации						
Код модуля в составе дисциплины, практики и т.п.	Формы текущего контроля успеваемости		Виды промежуточной аттестации		Виды итоговой аттестации (только для программ итоговой аттестации и дополнительных образовательных программ)	
	Формы	Сроки	Виды	Сроки	Виды	Сроки
ОСНОВНАЯ ТРАЕКТОРИЯ						
очная форма обучения						
Семестр 5			зачёт, по результатам работы за период обучения	по графику промежуточной аттестации, по графику промежуточной аттестации		
Семестр 6			зачёт, по результатам работы за период обучения, экзамен, устно, традиционная форма	по графику промежуточной аттестации, по графику промежуточной аттестации		

				ИИ		
--	--	--	--	----	--	--

2.2. Структура и содержание учебных занятий

Период обучения (модуль): Семестр 5

№ п/п	Наименование темы (раздела, части)	Вид учебных занятий	Количество часов
1	Общие понятия. Фундаментальные решения. Уравнения Лапласа и Гельмгольца.	Лекции	10
		практические занятия в присутствии преподавателя	6
		по методическим материалам	30
2	Контрольная работа	контрольная работа	2
3	Теория потенциала. Задача Штурма-Лиувилля. Метод Фурье.	Лекции	20
		практические занятия в присутствии преподавателя	6
		по методическим материалам	26
4	Зачет	промежуточная аттестация (ауд)	2

Раздел 1. Общие понятия. Фундаментальные решения. Уравнения Лапласа и Гельмгольца.

1. Уравнения Лапласа и Гельмгольца. Уравнение теплопроводности. Волновое уравнение. Уравнение Больцмана.
2. Уравнение Шредингера. Граничные условия Дирихле и Неймана. Локальная классификация линейных уравнений второго порядка.
3. Задачи Коши для уравнения теплопроводности и для волнового уравнения во всем пространстве. Решение Даламбера.
4. Метод Римана. Задача Коши для волнового уравнения в пространстве нечетной размерности. Принцип Гюйгенса. Теорема единственности.
5. Метод спуска. Ф. р. для уравнения теплопроводности. Скорость распространения возмущений. Корректность. Некорректность задачи Коши для эллиптического уравнения (пример Адамара).

Раздел 3. Теория потенциала. Задача Штурма-Лиувилля. Метод Фурье.

1. Ф.р. уравнения Лапласа для круга и для полуплоскости. Ядро Пуассона. Функция Грина в R^n и для шара (метод отражений).
2. Принцип максимума и теорема о среднем. Уравнение Гельмгольца.
3. Задачи Дирихле и Неймана в области с гладкой границей. Потенциалы простого и двойного слоев.
4. Формулы Сохоцкого. Условие Ляпунова и сведение к интегральному уравнению.
5. Фредгольмовость. Условие разрешимости задачи Неймана.
6. Задача Штурма-Лиувилля на отрезке. Функция Грина. Дискретность спектра. Простота собственных значений и осцилляционная теорема Штурма.

7. Резольвента — представление контурным интегралом и в виде ряда. Задача на полуоси.
8. Разделение переменных для уравнения Лапласа во внутренней и внешней области круга и шара.
9. Полиномы Лежандра — дифференциальное уравнение, интегральное представление, формула Родрига.
10. Функции Бесселя. Разделение переменных в гиперболических и параболических задачах Коши.

Период обучения (модуль): **Семестр 6**

№ п/п	Наименование темы (раздела, части)	Вид учебных занятий	Количество часов
1	Пространства гладких функций в области	Лекции	8
		практические занятия в присутствии преподавателя	6
		по методическим материалам	6
		Лекции	10
2	Теоремы вложения	практические занятия в присутствии преподавателя	8
		по методическим материалам	6
		Лекции	14
		практические занятия по методическим материалам	10
3	Многообразия	по методическим материалам	6
		промежуточная аттестация (ауд)	2
4	Зачет	промежуточная аттестация (ауд)	2
5	Экзамен	промежуточная аттестация (с.р.)	32
		промежуточная аттестация (ауд)	2

Раздел 1. Пространства гладких функций в области

1. Обобщенные производные. Гладкость и преобразование Фурье.
2. Пространства Соболева в R^n и T^n . Простейшие интерполяционные теоремы. Неравенство Хаусдорфа-Юнга.
3. Сужения и продолжения функций — разбиение Уитни и регуляризованное расстояние
4. Определения пространств Соболева в области. Эквивалентные нормировки. Теорема Майерса-Серрина.

Раздел 2. Теоремы вложения.

1. Критерии компактности в L^2 и в C . Элементарная компактность вложения (одномерная теорема Реллиха).

2. Общая теорема о компактном вложении.
3. Дискретность спектра задач Дирихле и Неймана для оператора Лапласа в ограниченных областях, постановка задач мат физики в ограниченной области.
4. Теоремы о следах. Интегральные представления гладких функций. Классы Зигмунда.
5. Неравенства Фридрикса, Пуанкаре и Харди.

Раздел 3. Многообразия.

1. Вещественные и комплексные многообразия. Дифференциальные формы. Вещественные и комплексные векторные расслоения.
2. Почти комплексные многообразия и операторы Коши-Римана. Интегрируемые почти комплексные структуры.
3. Предпучки и пучки. Резольвенты пучков. Пучки и расслоения. Когомологии с коэффициентами в пучке. Теоремы де Рама и Дольбо.
4. Связность в вещественном или комплексном расслоении (калибровочное поле). Кривизна связности. Метрика в расслоении и метрическая связность. Каноническая связность и кривизна эрмитова голоморфного векторного расслоения.
5. Формула Черна-Вейля и классы Черна комплексного расслоения. Линейные голоморфные расслоения и дивизоры.
6. Пространства Соболева и дифференциальные операторы на комплексных многообразиях. Символ эллиптического оператора. Эрмитова внешняя алгебра на эрмитовом пространстве.
7. Кэлеровы многообразия. Дифференциальные операторы на кэлеровых многообразиях. Лапласианы Ходжа и Дольбо. Теорема Ходжа о разложении на компактных кэлеровых многообразиях.

Раздел 3. Обеспечение учебных занятий

3.1. Методическое обеспечение

3.1.1 Методические указания по освоению дисциплины

Посещение лекций и практических занятий

3.1.2 Методическое обеспечение самостоятельной работы

Основная и дополнительная литература

3.1.3 Методика проведения текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации и критерии оценивания

Методика проведения зачета

Зачет проводится в устной форме. Для получения зачета необходимо решить 60% задач, предлагаемых в течение семестра. В случае, если к моменту проведения зачета студент решил меньшее количество задач, на зачете ему предлагаются задачи аналогичные по тематике и сложности. Задачи даются в форме домашних заданий с устной сдачей («листочки»), письменных домашних заданий и контрольных. Темы задач фиксированы, количество и форма выдачи остается на усмотрение преподавателя практических занятий. Возможна выдача задач повышенной сложности, решение которых засчитывается в

качестве индивидуальных достижений студента (при подаче заявок на именные стипендии, конкурсы и т.п.); сдача таких заданий проводится в устной форме.

Методика проведения экзамена

Экзамен проводится в устной форме. Билет состоит из двух вопросов. Время подготовки ответа на вопросы билета составляет 60 минут.

Использование конспектов и учебников, а также электронных устройств хранения, обработки или передачи информации при подготовке и ответе на вопросы экзамена категорически запрещено. В случае обнаружения факта использования недозволенных материалов (устройств) составляется акт и студент удаляется с экзамена. После ответа на вопросы билета преподаватель задает несколько дополнительных вопросов, на основании оценки ответов на которые итоговая оценка по предмету может быть повышена или понижена.

Критерии выставления оценок

Оценка «отлично» ставится за полностью раскрытый теоретический материал и правильные ответы на дополнительные вопросы преподавателя. В болонской шкале оценка может быть скорректирована в ту или иную сторону с учетом малозначительных погрешностей изложения или, напротив, углубленного изложения материала.

Оценка «хорошо» ставится за изложенный теоретический материал билета (возможно с помощью наводящих подсказок преподавателя).

Оценка «удовлетворительно» ставится за знание основных вопросов по каждой теме.

Оценка «неудовлетворительно» выставляется, если не выполняются условия для получения оценок «отлично», «хорошо» и «удовлетворительно».

3.1.4 Методические материалы для проведения текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации (контрольно-измерительные материалы, оценочные средства)

Период обучения (модуль): **Семестр 5**

Темы задач:

1. Задачи Коши для уравнения теплопроводности.
2. Задача Штурма-Лиувилля.
3. Задачи Дирихле и Неймана.

Период обучения (модуль): **Семестр 6**

Темы задач:

1. Пространства Соболева.
2. Интерполяционные теоремы.
3. Задачи Дирихле и Неймана.
4. Компактности вложений.
5. Спектры задач Дирихле и Неймана.

Список вопросов к экзамену:

1. Уравнения Лапласа и Гельмгольца.
2. Уравнение теплопроводности.

Волновое уравнение. Уравнение Больцмана.

3. Уравнение Шредингера. Граничные условия Дирихле и Неймана.
4. Локальная классификация линейных уравнений второго порядка.
5. Задачи Коши для уравнения теплопроводности и для волнового уравнения во всем пространстве.
6. Метод Римана.
7. Метод спуска. Ф. р. для уравнения теплопроводности.
8. Ф.р. уравнения Лапласа для круга и для полуплоскости. Ядро Пуассона.
9. Принцип максимума и теорема о среднем. Уравнение Гельмгольца.
10. Задачи Дирихле и Неймана в области с гладкой границей.
11. Потенциалы простого и двойного слоев.
12. Формулы Сохоцкого.
13. Фредгольмовость. Условие разрешимости задачи Неймана.
14. Задача Штурма-Лиувилля на отрезке. Функция Грина.
15. Дискретность спектра. Простота собственных значений и осцилляционная теорема Штурма.
16. Резольвента — представление контурным интегралом и в виде ряда.
17. Разделение переменных для уравнения Лапласа во внутренности и внешности круга и шара.
18. Полиномы Лежандра — дифференциальное уравнение, интегральное представление, формула Родрига.
19. Функции Бесселя.
20. Обобщенные производные. Гладкость и преобразование Фурье.
21. Пространства Соболева в R^n и T^n . Простейшие интерполяционные теоремы.
22. Неравенство Хаусдорфа-Юнга.
23. Сужения и продолжения функций — разбиение Уитни и регуляризованное расстояние
24. Определения пространств Соболева в области.
25. Критерии компактности в L^2 и в C .
26. Общая теорема о компактном вложении.
27. Дискретность спектра задач Дирихле и Неймана для оператора Лапласа в ограниченных областях, постановка задач мат физики в ограниченной области.
28. Теоремы о следах. Интегральные представления гладких функций. Классы Зигмунда.
29. Неравенства Фридрикса, Пуанкаре и Харди.
30. Вещественные и комплексные векторные расслоения.
31. Почти комплексные многообразия и операторы Коши-Римана. Интегрируемые почти комплексные структуры.
32. Предпучки и пучки. Резольвенты пучков. Пучки и расслоения.
33. Когомологии с коэффициентами в пучке. Теоремы де Рама и Дольбо.
34. Связность в вещественном или комплексном расслоении (калибровочное поле). Кривизна связности.
35. Формула Черна-Вейля и классы Черна комплексного расслоения. Линейные голоморфные расслоения и дивизоры.
36. Пространства Соболева и дифференциальные операторы на комплексных многообразиях.

37. Символ эллиптического оператора. Эрмитова внешняя алгебра на эрмитовом пространстве.
38. Кэлеровы многообразия.
39. Дифференциальные операторы на кэлеровых многообразиях.
40. Лапласианы Ходжа и Дольбо. Теорема Ходжа о разложении на компактных кэлеровых многообразиях.

3.1.5 Методические материалы для оценки обучающимися содержания и качества учебного процесса

3.2. Кадровое обеспечение

3.2.1 Образование и (или) квалификация штатных преподавателей и иных лиц, допущенных к проведению учебных занятий

К чтению лекций должны привлекаться преподаватели, имеющие ученую степень доктора или кандидата наук (в том числе степень PhD, прошедшую установленную процедуру признания и установления эквивалентности) и/или ученое звание профессора или доцента.

3.2.2 Обеспечение учебно-вспомогательным и (или) иным персоналом

не требуется

3.3. Материально-техническое обеспечение

3.3.1 Характеристики аудиторий (помещений, мест) для проведения занятий

Стандартно оборудованные лекционные аудитории, должны вмещать поток в соответствии со списком студентов

3.3.2 Характеристики аудиторного оборудования, в том числе неспециализированного компьютерного оборудования и программного обеспечения общего пользования

доска для письма мелом или фломастером

3.3.3 Характеристики специализированного оборудования

не требуется

3.3.4 Характеристики специализированного программного обеспечения

не требуется

3.3.5 Перечень и объёмы требуемых расходных материалов

Мел — не менее 1 куски на час лекционных занятий, фломастеры для доски, губка

3.4. Информационное обеспечение

3.4.1 Список обязательной литературы

1. Владимиров В.С., Уравнения математической физики. – М.: Физматлит, 2000.

3.4.2 Список дополнительной литературы

1. Курант Р., Гильберт Д., Методы математической физики. – М.: Государственное технико-теоретическое издательство, 1951.

3.4.3 Перечень иных информационных источников

1. R. Adams, J. Fournier, "Sobolev spaces", 2003, Academic Press, AP Pure and Applied Mathematics Series.

2. P. Lax, Functional Analysis, Wiley-Interscience, New York, 2002

Раздел 4. Разработчики программы

Романов Роман Владимирович, к.ф.м.н., доцент кафедры математической физики физфак СПбГУ, morovom@gmail.com