Санкт-Петербургский государственный университет

Р А Б О Ч А Я П Р О Г Р А М М А
УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ

Функциональный анализ
Functional Analysis

Язык(и) обучения

русский

Трудоемкость в зачетных единицах: 4

Регистрационный номер рабочей программы: 043590

Раздел 1. Характеристики учебных занятий

1. Цели и задачи учебных занятий

Сообщение сведений о математическом анализе в объеме, необходимом для общего развития и изучения смежных дисциплин физико-математического цикла. Усвоение основных идей, понятий и фактов функционального анализа.

1.2. Требования подготовленности обучающегося к освоению содержания учебных занятий (пререквизиты)

Не предусмотрены.

1.3. Перечень результатов обучения (learning outcomes)

Обучающийся должен овладеть теоретическим материалом в объеме, предусмотренном программой, уметь применять полученные знания при решении теоретических и прикладных задач, на основе анализа освоенных разделов: локально выпуклые пространства, банаховы алгебры, спектральная теория.

1.4. Перечень и объём активных и интерактивных форм учебных занятий

практические занятия 0 часов, контрольные работы 0 часов, коллоквиумы 0 часов, промежуточная аттестация (зачеты и экзамены) 2 часа

Раздел 2. Организация, структура и содержание учебных занятий
2.1. Организация учебных занятий

2.1.1 Основной курс

Трудоёмкость, объёмы учебной работы и наполняемость групп обучающихся																		
Код модуля в составе дисциплины, практики и т.п.	Контактная работа обучающихся с преподавателем												Самостоятельная работа				Объём активных и интерактивных форм учебных занятий	Трудоёмкость
	лекции	семинары	консультации	практические занятия	лабораторные работы	контрольные работы	коллоквиумы	текущий контроль	промежуточная аттестация	итоговая аттестация	под руководством преподавателя	в присутствии преподавателя	сам. раб. с использованием методических материалов	текущий контроль (сам.раб.)	промежуточная аттестация (сам.раб.)	итоговая аттестация (сам.раб.)		
ОСНОВНАЯ ТРАЕКТОРИЯ																		
очная форма обучения																		
Семестр 4	30												6					1
	2-50												1-1					
Семестр 5	32		2						2				43		29		4	3
	2-50		2-50						2-50				1-1		1-1			
ИТОГО	62		2						2				49		29		4	4

Виды, формы и сроки текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации						
Код модуля в составе дисциплины, практики и т.п.	Формы текущего контроля успеваемости		Виды промежуточной аттестации		Виды итоговой аттестации (только для программ итоговой аттестации и дополнительных образовательных программ)	
	Формы	Сроки	Виды	Сроки	Виды	Сроки
ОСНОВНАЯ ТРАЕКТОРИЯ						
очная форма обучения						
Семестр 4						
Семестр 5			экзамен, устно, традиционная форма	по графику промежуточной аттестации		

2.2. Структура и содержание учебных занятий

Период обучения (модуль): **Семестр 4**

№ п/п	Наименование темы (раздела, части)	Вид учебных занятий	Количество часов
1	Линейные пространства. Гильбертовы пространства.	Лекции	10
		практические занятия	
		в присутствии преподавателя	
		по методическим материалам	
2	Локально выпуклые пространства.	Лекции	20
		практические занятия	
		в присутствии преподавателя	
		по методическим материалам	

Раздел 1. Линейные пространства. Гильбертовы пространства.

1. Предмет функционального анализа. Список уже встречавшихся слушателям фунциональных пространств. Общее определение нормированного пространства, банахова пространства. Какие пространства из списка банаховы? Непрерывность линейных операций в нормированном пространстве. Выпуклые, абсолютно выпуклые и линейные множества, сохранение этих свойств при замыкании. (Абсолютная) выпуклость шаров. Конечномерные пространства, эквивалентность всех норм на конечномерном пространстве, полнота конечномерного пространства, замкнутость конечномерного подпространства нормированоого пространства.

2. Лемма о почти-перпендикуляре. Описание конечномерных пространств в терминах относительной компактности ограниченных множеств. Линейные операторы, норма линейного непрерывного оператора, варианты определения. Полнота пространства операторов со значениями в банаховом пространстве. Сопряженное пространство. Простая часть теоремы Банаха-Штейнгауза (ограниченность норм последовательности линейных операторов и сходимость на плотном множестве влечет поточечную сходимость к ограниченному оператору). Принудительное продолжение ограниченного линейного оператора с плотного множества.

3. Скалярное произведение, неравенство Коши, неравенство треугольника. Унитарные и гильбертовы пространства. Расстояние от точки до выпуклого множества в гильбертовом пространстве достигается на единственном векторе. Ортогональность, ортогональное дополнение. Ближайшая точка к заданному вектору в заданном подпространстве и ортогональность. Ортогональный проектор на подпространство. Второе ортогональное дополнение множества. Теорема Рисса об общем виде ограниченного линейного функционала на гильбертовом пространстве.

4. Доказательство теоремы Радона-Никодима (по фон Нейману). Сходимость ортогональных рядов. Полные ортогональные системы, существование. Ряды Фурье.

5. Неравенство Бесселя и равенство Парсеваля. Некоторые классические полные ортогональные системы (доказательство полноты откладывается). (Абсолютно) выпуклые множества в линейном пространстве и функционалы Минковского.

Полунормы.

Раздел 2. Локально выпуклые пространства.

1. Локально выпуклые пространства, определяющий набор полунорм. Критерий метризуемости. Постранства Фреше. Примеры. Ограниченные множества в ЛВП. Пространства Монтеля.
2. Теорема Арцела-Асколи. Монтелевость пространства всех последовательностей и пространства бесконечно дифференцируемых функций в области.
3. Теорема Хана-Банаха. Теоремы о разделении выпуклых множеств в ЛВП.
4. Вычисление сопряженных с пространствами L^p. Вложение банахова пространства во второе сопряженное, рефлексивность.
5. Теорема Банаха-Штейнгауза и принцип открытости отображения для пространств Фреше.
6. Дуальные пары и слабые топологии. Огрниченность и слабая ограниченность. Замыкание и слабое замыкание выпуклого множества. Поляры. Компактность поляры ограниченного множества в соответствующей слабой топологии. Частный случай: теорема Банаха-Алаоглу. Теорема о биполяре.
7. Рефлексивность и слабая компактность единичного шара, основные утверждения о рефлексивности. Крайние точки, теорема Крейна-Мильмана.
8. Теорема Рисса о представлении линейных непрерывных функционалов на C(K) (вариант с бэровскими мерами): регулярность бэровских мер, норма функционала, порожденного бэровской мерой; положительные функциоалы, представление вещественного фукционала на C(K) в виде разности двух положительных, сведение вопроса о существовании представляющей меры к случаю положительного функционала.
9. Топологические соображения: сведение к случаю, когда компакт K вполне несвязен, и завершение доказательства существования представляющей меры.
10. Теорема Стоуна-Вейерштраса (оказательство Бишопа, с помощью теоремы Крейна-Мильмана). Примеры применения. Пропущенные утверждения о полноте классических ортогональных систем. Сопряженный оператор, простейшие свойства операции сопряжения. Вариант для операторов в гильбертовом пространстве. Взаимосвязь между (односторонней) обратимостью оператора и его сопряженного.

Период обучения (модуль): **Семестр 5**

№ п/п	Наименование темы (раздела, части)	Вид учебных занятий	Количество часов
1	Банаховы Алгебры	Лекции	18
		практические занятия	
		в присутствии преподавателя	
		по методическим материалам	20
2	Спектральная теория	Лекции	14
		практические занятия	
		в присутствии преподавателя	
		по методическим материалам	23
9	Экзамен	промежуточная аттестация (ауд)	2
		промежуточная аттестация (с.р.)	29

Раздел 1. Банаховы алгебры.

1. Банаховы алгебры. Основная лемма об обратимости. Резольвентное множество и спектр элемента банаховой алгебры, резольвента. Спектральный радиус, формула для его вычисления. Случай банаховой алгебры операторов, собственные значения и собственные векторы. Совпадение спектров сопряженных операторов.

2. Некоторые примеры: норма интегрального оператора из C(K) в терминах ядра. Спектральный радиус оператора Вольтерра. Спектр оператора сдвига в l^2.

3. Компактные операторы в банаховых пространствах, их основные свойства. Эквивалентность компактности оператора и его сопряженного. Свойства оператора id-T, где T - компактный.

4. Свойства оператора id-T, где T - компактный (окончание). Спектр компактного оператора, альтернатива Фредгольма.

5. Конструкция фактор-пространства. Коммутативные банаховы алгебры с единицей: идеалы, замкнутость максимальных идеалов. Совпадение с полем комплексных чисел любой коммутативной банаховой алгебры, все элементы которой обратимы. Замкнутые идеалы и линейные мультипликативные функционалы. Пространство Гельфанда.

6. Преобразование Гельфанда, спектральная норма. Спектр элемента в терминах преобразования Гельфанда. Совпадение спектральной нормы со спектральным радиусом.

7. B*-алгебры. Основные примеры: C(K) и алгебра всех ограниченых операторов гильбертовом пространстве. Теорема Гельфанда-Наймарка.

8. Достаточное условия неизменности спектра при переходе к подалгебре. Нормальные операторы. Частные случаи: самосопряженные и унитарные операторы, их свойства. Описание ортогональных проекторов.

9. В*-алгебра, порожденная нормальным оператором, ее пространство Гельфанда. Замечание о совпадении спектра любого элемента этой подалгебры относительно ее самой со спектром этого элемента в адгебре всех ограниченных операторов. Непрерывные функции от нормального оператора.

Раздел 2. Спектральная теория.

1. Спектральная (проекторно-значная) мера. Интеграл (в слабом смысле) по спектральной мере. Доказательство того, что этот интеграл задает непрерывный гомоморфизм алгебры ограниченных борелевских функций в алгебру ограниченных операторов в гильбертовом пространстве.

2. Существование представляющей спектральной меры для любого ограниченного нормального оператора в гильбертовом пространстве, ее единственность.

3. Циклические нормальные операторы и их спектральное представление. Спектральная мера компактного нормального оператора. Поточечая сходимость спектрального разложения для такого оператора. Полярное представление ограниченного оператора в гильбертовом пространстве.

4. Представление любого компактного оператора в гильбертовом протсранстве рядом Шмидта. Сингулярные числа. Определение классов Шаттена-Неймана. Эквиваентные определения класса Гильберта-Шмидта.

5. Алгебра абсолютно сходящихся рядов Фурье, ее пространство Гельфанда. Тауберова теорема Винера. Сведения об общих групповых алгебрах.

6. Секвенциальный характер слабой компактности, теорема Эберлейна-Шмульяна.

7. Теорема Витали-Хана-Сакса и слабая компактность в пространствах мер. Слабая секвенциальная полнота пространства l^1.

Раздел 3. Обеспечение учебных занятий

3.1. Методическое обеспечение

3.1.1 Методические указания по освоению дисциплины

Посещение лекций и практических занятий

3.1.2 Методическое обеспечение самостоятельной работы

Основная и дополнительная литература

3.1.3 Методика проведения текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации и критерии оценивания

Методика проведения экзамена
Экзамен проводятся в устной форме. Билет состоит из двух вопросов. Время подготовки ответа на вопросы билета составляет 60 минут.
Использование конспектов и учебников, а также электронных устройств хранения, обработки или передачи информации при подготовке и ответе на вопросы экзамена категорически запрещено. В случае обнаружения факта использования недозволенных материалов (устройств) составляется акт и студент удаляется с экзамена. После ответа на вопросы билета преподаватель задает несколько дополнительных вопросов, на основании оценки ответов на которые итоговая оценка по предмету может быть повышена или понижена.
Критерии выставления оценок
Оценка «отлично» ставится за полностью раскрытый теоретический материал и правильные ответы на дополнительные вопросы преподавателя. В болонской шкале оценка может быть скорректирована в ту или иную сторону с учетом малозначительных погрешностей изложения или, напротив, углубленного изложения материала.
Оценка «хорошо» ставится за изложенный теоретический материал билета (возможно с помощью наводящих подсказок преподавателя).
Оценка «удовлетворительно» ставится за знание основных вопросов по каждой теме.
Оценка «неудовлетворительно» выставляется, если не выполняются условия для получения оценок «отлично», «хорошо» и «удовлетворительно».

3.1.4 Методические материалы для проведения текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации (контрольно-измерительные материалы, оценочные средства)

Семестр 5.

Вопросы к экзамену

1. Нормированные пространства. Банаховы пространства. Непрерывность линейных операций. Эквивалентность норм в конечномерных пространствах.
2. Лемма о почти перпендикуляре.
3. Сопряженное пространство. Полнота пространства операторов.
4. Теорема Банаха-Штейнгауза.
5. Линейные операторы, заданные на плотных множествах.
6. Скалярное произведение. Неравенство Коши. Неравенство треугольника.
7. Гильбертовы пространства. Расстояние от точки до выпуклого множества.
8. Теорема Рисса о виде функционала в гильбертовом пространстве.
9. Теорема Радона-Никодима.
10. Сходимость ортогональных рядов.
11. Полные ортогональные системы. Разложение по ортогональному базису.

12. Ряды Фурье.
13. Неравенство Бесселя. Равенство Парсеваля.
14. Выпуклые множества в линейном пространстве. Функционалы Минковского.
15. Полунормы. Системы полунорм.
16. Локально выпуклые пространства.
17. Пространства Фреше. Примеры.
18. Ограниченные множества в ЛВП. Пространства Монтеля.
19. Теорема Арцела-Асколи.
20. Теорема Хана-Банаха.
21. Пространства сопряженные с L^p.
22. Вложение банахова пространства во второе сопряженное. Рефлексивность.
23. Принцип открытого отображения.
24. Дуальные пары и слабые топологии.
25. Слабое замыкание выпуклого множества.
26. Теорема Банаха-Алаоглу.
27. Теорема о биполяре.
28. Слабая компактность единичного шара.
29. Крайние точки. Теорема Крейна-Мильмана.
30. Теорема Рисса о функционалах в C(K).
31. Теорема Стоуна-Вейерштрасса.
32. Сопряженный оператор.
33. Обратимость сопряженного оператора.
34. Банаховы алгебры.
35. Теорема об обратимости. Резольвентное множество.
36. Спектральный радиус. Спектр сопряженного оператора.
37. Спектральный радиус оператора Вольтерра. Спектр оператора сдвига в l^2.
38. Компактные операторы в банаховых пространствах.
39. Компактность сопряженного оператора.
40. Спектр компактного оператора.
41. Альтернатива Фредгольма.
42. Фактор пространство.
43. Коммутативные банаховы алгебры с единицей.
44. Пространство Гельфанда.
45. Теорема Гельфанда-Наймарка.
46. Спектральная норма.
47. Нормальные операторы.
48. Самосопряженные и унитарные операторы.
49. Ортогональные проекторы.
50. Непрерывные функции от нормального оператора.
51. Спектральная мера. Интеграл по спектральной мере.
52. Ограниченные нормальные операторы в гильбертовом пространстве.
53. Циклические нормальные операторы.
54. Полярное представление оператора.
55. Ряд Шмидта.
56. Классы Шаттена-фон Неймана.
57. Алгебра абсолютно сходящихся рядов Фурье. Тауберова теорема Винера.
58. Теорема Эберлейна-Шмульяна.
59. Теорема Витали-Хана-Сакса.
60. Слабая секвенциальная полнота.

3.1.5 Методические материалы для оценки обучающимися содержания и качества учебного процесса

3.2. Кадровое обеспечение

3.2.1 Образование и (или) квалификация штатных преподавателей и иных лиц, допущенных к проведению учебных занятий

К чтению лекций должны привлекаться преподаватели, имеющие ученую степень доктора или кандидата наук (в том числе степень PhD, прошедшую установленную процедуру признания и установления эквивалентности) и/или ученое звание профессора или доцента.

3.2.2 Обеспечение учебно-вспомогательным и (или) иным персоналом

не требуется

3.3. Материально-техническое обеспечение

3.3.1 Характеристики аудиторий (помещений, мест) для проведения занятий

Стандартно оборудованные лекционные аудитории, должны вмещать поток в соответствии со списком студентов

3.3.2 Характеристики аудиторного оборудования, в том числе неспециализированного компьютерного оборудования и программного обеспечения общего пользования

доска для письма мелом или фломастером

3.3.3 Характеристики специализированного оборудования

не требуется

3.3.4 Характеристики специализированного программного обеспечения

не требуется

3.3.5 Перечень и объёмы требуемых расходных материалов

Мел — не менее 1 куска на час лекционных занятий, фломастеры для доски, губка

3.4. Информационное обеспечение

3.4.1 Список обязательной литературы

1. Л.В. Канторович, Г.П. Акилов, “Функциональный анализ”, - СПб, БХВ, 2004

3.4.2 Список дополнительной литературы

1. У. Рудин, “Функциональный анализ”, - М.: Мир, 1975
2. Данфорд Н., Шварц Дж. Т. Линейные операторы. Т. I: Общая теория. – М.: ИЛ,1962.
3. Данфорд Н., Шварц Дж. Т. Линейные операторы. Т. II: Спектральная теория. – М.: Мир,1966.

3.4.3 Перечень иных информационных источников

не предусмотрен

Раздел 4. Разработчики программы

Кисляков Сергей Владимирович, член-корреспондент РАН, профессор, директор ПОМИ РАН, skis@pdmi.ras.ru