Листочек 3

Дедлайн 11.11.17

1. (10) Вычислите первый ненулевой член ряда Тейлора в нуле функции $\sin\tan x - \tan\sin x$.

2. Пусть $[a, b]$ — некоторый отрезок, $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ — выпуклая функция.

   (a) (4) Докажите, что в каждой точке $x \in (a, b)$ функция f имеет производные слева и справа, то есть существуют пределы

   $$\lim_{h\to 0-} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad \text{и} \quad \lim_{h\to 0+} \frac{f(x+h) - f(x)}{h},$$

   и, кроме того, производная f не убывает.

   (b) (6) Докажите, что существует такое не более чем счётное множество $J \subset [a, b]$, что для всякого $x \in (a, b) \setminus J$ функция f дифференцируема в точке x.

3. (a) (1) Докажите, что существует ненулевая бесконечно дифференцируемая функция, равная нулю вне некоторого отрезка.

   (b) (8) Пусть K — замкнутое подмножество прямой. Докажите, что существует бесконечно дифференцируемая функция f, такая что

   $$K = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) = 0\}.$$

4. (4) Пусть P — многочлен двух переменных с целыми коэффициентами. Верно ли, что если для всяких $x, y \in \mathbb{R}$ выполнено неравенство $P(x, y) > 0$, то существует число $\delta > 0$, такое что $P(x, y) \geqslant \delta$ для всех $x, y \in \mathbb{R}$?

5. (6) Пусть $\ln f_j$ — выпуклые функции. Докажите, что $\ln \sum_j f_j$ — тоже выпуклая функция.

6. Пусть f — выпуклая строго возрастающая дифференцируемая функция на $\mathbb{R}$. Определим последовательность $\{x_n\}_n$ по правилу

   $$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

   (a) (5) Вычислите предел x_n.

(b) (7) Пусть предел x_∞ последовательности $\{x_n\}_n$ конечен, а функция f дважды непрерывно дифференцируема. Докажите, что существуют константы $c < 1$ и C (зависящие от x_0), такие что

$$|x_\infty - x_n| \leqslant Cc^{2^n}.$$

7. (12) Пусть $\alpha \in (0,1)$. Постройте функцию $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, такую что для всякого отрезка $J \subset [0,1]$ функция $f|_J$ является α-гёльдеровой, но не является β-гёльдеровой ни для какого $\beta > \alpha$.

8. (6) Пусть φ — бесконечно дифференцируемая в нуле функция, такая что $\varphi(0) = 0$. Докажите, что функция $t \mapsto \frac{\varphi(t)}{t}$ бесконечно дифференцируема в нуле.

9. Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^\alpha}, \quad x \in \mathbb{R}, \alpha > 0.$$

   (a) (8) Докажите, что указанный ряд сходится при всяком x.

   (b) (4) Докажите неравномерность по $x \in [-1,1]$ сходимости ряда при фиксированном $\alpha \leqslant 1$.

   (c) (6) Докажите неравномерность по $\alpha > 0$ сходимости ряда при фиксированном $x \neq \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

   (d) (8) Пусть $\delta > 0$. Докажите равномерность по $(x, \alpha) \in [1,2] \times [\delta, \infty)$ сходимости ряда.

10. (5) Докажите, что число положительных корней многочлена не превосходит числа перемен знака последовательности его коэффициентов.