Санкт-Петербургский государственный университет

Р А Б О Ч А Я   П Р О Г Р А М М А
УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ

Основы наивной теории множеств
Basic Concepts of Naive Set Theory

Язык(и) обучения

русский

Трудоемкость в зачетных единицах: 3

Регистрационный номер рабочей программы: 053451

Раздел 1. Характеристики учебных занятий

1.1. Цели и задачи учебных занятий

Сообщение сведений о наивной теории множеств в объеме, необходимом для общего развития и изучения смежных дисциплин физико-математического цикла. Усвоение основных идей, понятий и фактов наивной теории множеств.

1.2. Требования подготовленности обучающегося к освоению содержания учебных занятий (пререквизиты)

Не предусмотрены.

1.3. Перечень результатов обучения (learning outcomes)

Обучающийся должен овладеть теоретическим материалом в объеме, предусмотренном программой, уметь применять полученные знания при решении теоретических и прикладных задач, на основе анализа освоенных разделов: представление о множествах и их мощностях, отношения и функции в теории множеств; уяснить логику и технику построения математической теории как фундамента самостоятельных научных исследований.

1.4. Перечень и объём активных и интерактивных форм учебных занятий

Практические занятия 16 часов, промежуточная аттестация (экзамен) 4 часа.

Раздел 2. Организация, структура и содержание учебных занятий
2.1. Организация учебных занятий

2.1.1 Основной курс

Трудоёмкость, объёмы учебной работы и наполняемость групп обучающихся																		
	Контактная работа обучающихся с преподавателем												Самостоятельная работа					
Код модуля в составе дисциплины, практики и т.п.	лекции	семинары	консультации	практические занятия	лабораторные работы	контрольные работы	коллоквиумы	текущий контроль	промежуточная аттестация	итоговая аттестация	под руководством преподавателя	в присутствии преподавателя	сам. раб. с использованием методических материалов	текущий контроль (сам.раб.)	промежуточная аттестация (сам.раб.)	итоговая аттестация (сам.раб.)	Объём активных и интерактивных форм учебных занятий	Трудоёмкость
ОСНОВНАЯ ТРАЕКТОРИЯ																		
очная форма обучения																		
Семестр 1	16		2	16					2				44		28		20	3
	2-50		2-50	2-50					0-50				1-1		1-1			
ИТОГО	16		2	16					2				44		28		20	3

Виды, формы и сроки текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации						
Код модуля в составе дисциплины, практики и т.п.	Формы текущего контроля успеваемости		Виды промежуточной аттестации		Виды итоговой аттестации (только для программ итоговой аттестации и дополнительных образовательных программ)	
	Формы	Сроки	Виды	Сроки	Виды	Сроки
ОСНОВНАЯ ТРАЕКТОРИЯ						
очная форма обучения						
Семестр 1			экзамен, устно, традиционная форма	по графику промежуточной аттестации		

2.2. Структура и содержание учебных занятий

Период обучения (модуль): **Семестр 1**

№ п/п	Наименование темы (раздела, части)	Вид учебных занятий	Количество часов
1	Представление о множествах и их мощностях	Лекции	8
		практические занятия	8
		в присутствии преподавателя	
		по методическим материалам	22
2	Отношения и функции в теории множеств	Лекции	8
		практические занятия	8
		в присутствии преподавателя	
		по методическим материалам	22
3	Экзамен	промежуточная аттестация (ауд)	2
		промежуточная аттестация (с.р.)	28

Раздел 1: *Представление о множествах и их мощностях*

1. Основные обозначения, связанные с множествами и операциями над ними. Характеристические функции множеств. Представление о числе элементов в конечном множестве. Принцип равномощности для конечных множеств. Некоторые начальные сведения из комбинаторики.

2. Определение равномощности для произвольных множеств. Примеры равномощных множеств. Счётные множества и их основные свойства. Альтернативное определение бесконечных множеств (по Дедекинду).

3. Теорема о равномощности множества всех вещественных чисел и множества всех подмножеств множества всех натуральных чисел. Следствие о равномощности единичного квадрата (со внутренностью) и единичного отрезка. Интуитивное представление о категориях. Сравнение мощностей. Теорема Кантора–Шрёдера–Бернштейна и её применение.

4. Теорема Кантора (обычная и обобщённая). Кодирование обычных математических объектов натуральными числами и множествами натуральных чисел. Континуум-гипотеза. Замечание о суммировании несчётных семейств вещественных чисел. Парадоксы, возникающие в естественных языках, и парадоксы наивной теории множеств. Представление об аксиоматической системе Цермело–Френкеля с аксиомой выбора.

Раздел 2: *Отношения и функции в теории множеств*

1. Моделирование отношений и функций в теории множеств. Моделирование упорядоченных пар (по Куратовскому). Отношения эквивалентности и факторизация по ним. Отношения предпорядка, частичного порядка и линейного порядка.

2. Изоморфизмы между частично упорядоченными множествами. Примеры изоморфных частично упорядоченных множеств. Теорема об изоморфизме любых двух плотных линейно упорядоченных множеств без концов и следствия из неё. Лемма Куратовского–Цорна (без доказательства) и её применение.

3. Фундированные множества. Альтернативное определение фундированных множеств. Примеры фундированных множеств. Принцип трансфинитной индукции (для фундированных множеств). Вполне упорядоченные множества. Альтернативное определение вполне упорядоченных множеств. Примеры вполне упорядоченных множеств. Начальные отрезки линейно упорядоченных и вполне упорядоченных множеств.

4. Определение функций на вполне упорядоченных множествах по трансфинитной рекурсии (посредством обычных или частичных рекурсивных правил). Теорема о сравнимости любых двух вполне упорядоченных множеств и следствия из неё. Теорема Цермело (без доказательства) и её применение.

Раздел 3. Обеспечение учебных занятий
3.1. Методическое обеспечение
3.1.1 Методические указания по освоению дисциплины

Посещение лекций и практических занятий

3.1.2 Методическое обеспечение самостоятельной работы

Основная и дополнительная литература

3.1.3 Методика проведения текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации и критерии оценивания

Методика проведения экзамена
Экзамен проводится в устной форме. Билет состоит из двух вопросов. Время подготовки ответа на вопросы билета составляет 60 минут.
Использование конспектов и учебников, а также электронных устройств хранения, обработки или передачи информации при подготовке и ответе на вопросы экзамена категорически запрещено. В случае обнаружения факта использования недозволенных материалов (устройств) составляется акт и студент удаляется с экзамена. После ответа на вопросы билета преподаватель задает несколько дополнительных вопросов, на основании оценки ответов на которые итоговая оценка по предмету может быть повышена или понижена.
Критерии выставления оценок
Оценка «отлично» ставится за полностью раскрытый теоретический материал и правильные ответы на дополнительные вопросы преподавателя. В болонской шкале оценка может быть скорректирована в ту или иную сторону с учетом малозначительных погрешностей изложения или, напротив, углубленного изложения материала.
Оценка «хорошо» ставится за изложенный теоретический материал билета (возможно с помощью наводящих подсказок преподавателя).
Оценка «удовлетворительно» ставится за знание основных вопросов по каждой теме.
Оценка «неудовлетворительно» выставляется, если не выполняются условия для получения оценок «отлично», «хорошо» и «удовлетворительно».

3.1.4 Методические материалы для проведения текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации (контрольно-измерительные материалы, оценочные средства)

Период обучения (модуль): **Семестр 1**

Темы **задач**:

1. Основные операции над множествами. Характеристические функции множеств. Принцип равномощности для конечных множеств.

2. Равномощность для произвольных множеств. Счётные множества и их основные свойства.

3. Континуальные множества и их основные свойства. Теорема Кантора (обычная и обобщённая). Сравнение мощностей. Теорема Кантора–Шрёдера–Бернштейна.

4. Отношений и функции в рамках теории множеств. Инъекции, сюрьекции и биекции. Отношения эквивалентности и факторизация по ним. Отношения предпорядка, частичного порядка и линейного порядка.

5. Изоморфизмы между частично упорядоченными множествами. Плотные линейно упорядоченные множества.

6. Фундированные множества. Принцип трансфинитной индукции (для фундированных множеств). Вполне упорядоченные множества. Начальные отрезки линейно упорядоченных и вполне упорядоченных множеств.

7. Определение функций на вполне упорядоченных множествах по трансфинитной рекурсии (посредством обычных или частичных рекурсивных правил).

Список вопросов к экзамену:

1. Основные обозначения, связанные с множествами и операциями над ними. Основные равенства, связанные с операциями над множествами.

2. Характеристические функции множеств. Принцип равномощности для конечных множеств. Формула включений и исключений.

3. Определение равномощности для произвольных множеств. Примеры равномощных множеств. Счётные множества. Критерий счётности (в терминах последовательностей). Счётность множества всех конечных подмножеств счётного множества, а также множества всех слов в счётном алфавите.

4. Основные свойства (не более чем) счётных множеств. Счётность множества всех рациональных чисел, множества всех алгебраических чисел и множества всех периодических дробей. Добавление и вычитание не более чем счётных множеств из бесконечных. Альтернативное определение бесконечных множеств (по Дедекинду).

5. Теорема о равномощности множества всех вещественных чисел и множества всех подмножеств множества всех натуральных чисел. Следствие о равномощности единичного квадрата (со внутренностью) и единичного отрезка. Интуитивное представление о категориях.

6. Сравнение мощностей. Теорема Кантора–Шрёдера–Бернштейна и примеры её применения.

7. Теорема Кантора (обычная и обобщённая). Кодирование обычных математических объектов натуральными числами и множествами натуральных чисел. Континуум-гипотеза. Замечание о суммировании несчётных семейств вещественных чисел.

8. Парадоксы, возникающие в естественных языках, и парадоксы наивной теории множеств. Представление об аксиоматической системе Цермело–Френкеля с аксиомой выбора.

9. Моделирование отношений и функций в теории множеств. Композиция бинарных отношений и её основные свойства. Моделирование упорядоченных пар (по Куратовскому). Отношения эквивалентности и факторизация по ним. Связь между отношениями эквивалентности и разбиениями на непустые подмножества.

10. Отношения предпорядка, частичного порядка и линейного порядка. Наибольшие (наименьшие) и максимальные (минимальные) элементы. Способы получения новых частично упорядоченных множеств из уже имеющихся. Изоморфизмы между частично упорядоченными множествами. Примеры изоморфных частично упорядоченных множеств. Расширение конечного частично упорядоченного множества до конечного линейно упорядоченного; характеризация конечных линейно упорядоченных множеств.

11. Соседние элементы. Плотные линейно упорядоченные множества. Теорема об изоморфизме любых двух плотных линейно упорядоченных множеств без концов и следствие из неё.

12. Лемма Куратовского–Цорна (без доказательства) и следствие из неё. Доказательство того, что в произвольном векторном пространстве всякое линейно независимое множество может быть расширено до базиса Гамеля.

13. Фундированные множества. Принцип трансфинитной индукции (для фундированных множеств). Альтернативное определение фундированных множеств. Примеры фундированных множеств.

14. Вполне упорядоченные множества. Альтернативное определение вполне упорядоченных множеств. Примеры вполне упорядоченных множеств. Базовые свойства вполне упорядоченных множеств. Основные свойства начальных отрезков линейно упорядоченных и вполне упорядоченных множеств.

15. Определение функций на вполне упорядоченных множествах по трансфинитной рекурсии посредством обычных (не частичных) рекурсивных правил. Теорема Цермело (без доказательства).

16. Определение функций на вполне упорядоченных множествах по трансфинитной рекурсии посредством частичных рекурсивных правил (используя обычное определением). Теорема о сравнимости любых двух вполне упорядоченных множеств и следствия из неё.

3.1.5 Методические материалы для оценки обучающимися содержания и качества учебного процесса

3.2. Кадровое обеспечение

3.2.1 Образование и (или) квалификация штатных преподавателей и иных лиц, допущенных к проведению учебных занятий

К чтению лекций должны привлекаться преподаватели, имеющие ученую степень доктора или кандидата наук (в том числе степень PhD, прошедшую установленную процедуру признания и установления эквивалентности) и/или ученое звание профессора или доцента.

3.2.2 Обеспечение учебно-вспомогательным и (или) иным персоналом

не требуется

3.3. Материально-техническое обеспечение

3.3.1 Характеристики аудиторий (помещений, мест) для проведения занятий

Стандартно оборудованные лекционные аудитории, должны вмещать поток в соответствии со списком студентов

3.3.2 Характеристики аудиторного оборудования, в том числе неспециализированного компьютерного оборудования и программного обеспечения общего пользования

доска для письма мелом или фломастером

3.3.3 Характеристики специализированного оборудования

не требуется

3.3.4 Характеристики специализированного программного обеспечения

не требуется

3.3.5 Перечень и объёмы требуемых расходных материалов

Мел — не менее 1 куска на час лекционных занятий, фломастеры для доски, губка

3.4. Информационное обеспечение

3.4.1 Список обязательной литературы

1. Верещагин, Н.К., и Шень, А. Лекции по математической логике и теории алгоритмов. Часть 1: Начала теории множеств — 4-е изд., доп. — М.: Изд-во МЦНМО, 2012. — 112 с. Электронная версия: http://www.mccme.ru/free-books/shen/shen-logic-part1-2.pdf

3.4.2 Список дополнительной литературы

1. Клини, С.К. Введение в метаматематику / пер. с англ. А.С. Есенина–Вольпина; под ред. В.А. Успенского. — М.: Изд-во иностранной литературы, 1957. — 527 с.
2. Успенский, В.А., Верещагин, Н.К., и Плиско, В.Е. Вводный курс математической логики. — М.: Изд-во МГУ, 1991. — 135 с.

3.4.3 Перечень иных информационных источников

1. Ершов, Ю.Л., и Палютин, Е.А. Математическая логика. — 6-е изд., испр. — М.: Физматлит, 2011. — 356 с.
2. Лавров, И.А., и Максимова, Л.Л. Задачи по теории множеств, математической логике и теории алгоритмов. — 5-е изд., испр. М.: Физматлит, 2004. — 256 с.
3. Enderton, H.B. Elements of Set Theory. — New York: Academic Press, 1977. — xiv + 279 p.

Раздел 4. Разработчики программы

Сперанский Станислав Олегович, кандидат физико-математических наук, доцент Санкт-Петербургского государственного университета, s.o.speranski@spbu.ru