

**Санкт-Петербургский государственный университет**

**РАБОЧАЯ ПРОГРАММА  
УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ**

Введение в риманову геометрию (осн курс), тр 7 сем  
Introduction to Riemannian geometry

**Язык(и) обучения**

русский

Трудоемкость в зачетных единицах: 5

Регистрационный номер рабочей программы: 045414

## **Раздел 1. Характеристики учебных занятий**

### **1.1. Цели и задачи учебных занятий**

Сообщение сведений о римановой геометрии в объеме, необходимом для общего развития и изучения смежных дисциплин физико-математического цикла. Усвоение основных идей, понятий и фактов римановой геометрии.

### **1.2. Требования подготовленности обучающегося к освоению содержания учебных занятий (пререквизиты)**

Владение курсом «Геометрия и топология».

### **1.3. Перечень результатов обучения (learning outcomes)**

Обучающийся должен овладеть теоретическим материалом в объеме, предусмотренном программой, уметь применять полученные знания при решении теоретических и прикладных задач, на основе анализа освоенных разделов: вариационный анализ геодезических, кривизна и геометрическое строение римановых пространств; уяснить логику и технику построения математической теории как фундамента самостоятельных научных исследований

### **1.4. Перечень и объём активных и интерактивных форм учебных занятий**

Промежуточная аттестация (экзамен) 4 часа.

## Раздел 2. Организация, структура и содержание учебных занятий

### 2.1. Организация учебных занятий

#### 2.1.1 Основной курс

Трудоёмкость, объёмы учебной работы и наполняемость групп обучающихся																	
Код модуля в составе дисциплины, практики и т.п.	Контактная работа обучающихся с преподавателем											Самостоятельная работа				Объём активных и интерактивных форм учебных занятий	Трудоёмкость
	лекции	семинары	консультации	практические занятия	лабораторные работы	контрольные работы	коллоквиумы	текущий контроль	промежуточная аттестация	итоговая аттестация	под руководством преподавателя	в присутствии преподавателя	сам. раб. с использованием методических материалов	текущий контроль (сам.раб.)	промежуточная аттестация (сам.раб.)		
<b>ОСНОВНАЯ ТРАЕКТОРИЯ</b>																	
<b>очная форма обучения</b>																	
Семестр 7	30	30	2					2				48		32		34	4
	2-50	2-25	2-50					2-50				1-1		1-1			
ИТОГО	30	30	2					2				48		32		34	4

Виды, формы и сроки текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации							
Код модуля в составе дисциплины, практики и т.п.	Формы текущего контроля успеваемости		Виды промежуточной аттестации		Виды итоговой аттестации (только для программ итоговой аттестации и дополнительных образовательных программ)		
	Формы	Сроки	Виды	Сроки	Виды	Сроки	
<b>ОСНОВНАЯ ТРАЕКТОРИЯ</b>							
<b>очная форма обучения</b>							
Семестр 7			экзамен, устно, традиционная форма		по графику промежуточной аттестации, по графику промежуточной аттестации		

## 2.2. Структура и содержание учебных занятий

Период обучения (модуль): Семестр 7

№ п/п	Наименование темы (раздела, части)	Вид учебных занятий	Количество часов
1	Вариационный анализ геодезических	Лекции	14
		практические занятия	14
		в присутствии преподавателя	
		по методическим материалам	18
2	Кривизна и геометрическое строение многообразий	Лекции	16
		практические занятия	16
		в присутствии преподавателя	
		по методическим материалам	30
3	Экзамен	промежуточная аттестация (ауд)	2
		промежуточная аттестация (с.р.)	28

### Раздел 1: Вариационный анализ геодезических

Связность Леви-Чивита, параллельный перенос, геодезические, экспоненциальное отображение (напоминание). Длина и энергия пути. Формула первой вариации. Функция расстояния, производные по направлениям.

Тензор кривизны (напоминание). Поля Якоби, сопряженные и фокальные точки. Локальное искажение метрики экспоненциальным отображением. Скалярная кривизна и объемы малых шаров. Универсальное накрытие многообразия без сопряженных точек. Метрики постоянной кривизны.

Формула второй вариации и ее применения. Теорема Синга.

### Раздел 2: Кривизна и геометрическое строение многообразий

Пространства с ограниченной сверху кривизной: поля Якоби, сравнение расстояний и углов в пределах радиуса инъективности. Теорема Картана-Адамара, пространства Адамара, выпуклость расстояния. Параллельные лучи, функции Буземана. Изометрии универсального накрывающего и фундаментальная группа пространства неположительной кривизны.

Функции дистанционного типа, кривизна и метрика эквидистантных поверхностей. Уравнение Рикатти. Сравнение решений уравнения Рикатти. Теорема Рауха. Теорема Бонне. Вторая производная расстояния. Теорема Топоногова. Неотрицательная секционная кривизна: теорема о расщеплении, фундаментальная группа. Кривизна Риччи, теорема Майерса, неравенство Бишопа-Громова.

### **Раздел 3. Обеспечение учебных занятий**

#### **3.1. Методическое обеспечение**

##### **3.1.1 Методические указания по освоению дисциплины**

Посещение лекций

##### **3.1.2 Методическое обеспечение самостоятельной работы**

Основная и дополнительная литература

##### **3.1.3 Методика проведения текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации и критерии оценивания**

###### **Методика проведения экзамена**

Экзамен проводится в устной форме. Билет состоит из двух вопросов. Время подготовки ответа на вопросы билета составляет 60 минут.

Использование конспектов и учебников, а также электронных устройств хранения, обработки или передачи информации при подготовке и ответе на вопросы экзамена категорически запрещено. В случае обнаружения факта использования недозволенных материалов (устройств) составляется акт и студент удаляется с экзамена. После ответа на вопросы билета преподаватель задает несколько дополнительных вопросов, на основании оценки ответов на которые итоговая оценка по предмету может быть повышена или понижена.

Критерии выставления оценок

Оценка «отлично» ставится за полностью раскрытый теоретический материал и правильные ответы на дополнительные вопросы преподавателя. В болонской шкале оценка может быть скорректирована в ту или иную сторону с учетом малозначительных погрешностей изложения или, напротив, углубленного изложения материала.

Оценка «хорошо» ставится за изложенный теоретический материал билета (возможно с помощью наводящих подсказок преподавателя).

Оценка «удовлетворительно» ставится за знание основных вопросов по каждой теме.

Оценка «неудовлетворительно» выставляется, если не выполняются условия для получения оценок «отлично», «хорошо» и «удовлетворительно».

##### **3.1.4 Методические материалы для проведения текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации (контрольно-измерительные материалы, оценочные средства)**

Период обучения (модуль): **Семестр 7**

**Список вопросов к экзамену:**

1. Формула первой вариации.
2. Производные функции расстояния по направлениям.
3. Поля Якоби, сопряженные и фокальные точки.
4. Локальное искажение метрики экспоненциальным отображением.
5. Скалярная кривизна и объемы малых шаров.
6. Универсальное накрытие многообразия без сопряженных точек.
7. Метрики постоянной кривизны.
8. Формула второй вариации.
9. Теорема Синга.
10. Поля Якоби в пространствах с ограниченной сверху кривизной.

11. Расстояния и углы в пространствах с ограниченной сверху кривизной.
12. Теорема Картана-Адамара.
13. Пространства Адамара, выпуклость расстояния.
14. Параллельные лучи и функции Буземана.
15. Фундаментальная группа пространства неположительной кривизны.
16. Функции дистанционного типа, кривизна и метрика эквидистантных поверхностей.
17. Уравнение Рикатти. Сравнение решений уравнения Рикатти.
18. Теоремы Рауха и Бонне.
19. Теорема Топоногова.
20. Теорема о расщеплении.
21. Теорема Майерса
22. Неравенство Бишопа-Громова.

### **Темы докладов на семинаре**

1. Модели гиперболического пространства.
2. Оператор кривизны в пространственных формах.
3. Произведения и искривленные произведения.
4. Римановы субмерсии и формула О'Нила
5. Группы Ли и инвариантные метрики на них.
6. Алгебра Ли группы Ли, присоединенные представления.
7. Геодезические инвариантных метрик.
8. Кривизна инвариантных метрик и однородных пространств.
9. Группа изометрий риманова многообразия.
10. Группы голономии.
11. Формулы интегральной геометрии.
12. Геодезический поток и мера Лиувилля.
13. Формула Сантало и ее приложения.
14. Неравенство Безиковича.
15. Систолические неравенства Пу и Лёвнера.

### **3.1.5 Методические материалы для оценки обучающимися содержания и качества учебного процесса**

### **3.2. Кадровое обеспечение**

#### **3.2.1 Образование и (или) квалификация штатных преподавателей и иных лиц, допущенных к проведению учебных занятий**

К чтению лекций должны привлекаться преподаватели, имеющие ученую степень доктора или кандидата наук (в том числе степень PhD, прошедшую установленную процедуру признания и установления эквивалентности) и/или ученое звание профессора или доцента.

#### **3.2.2 Обеспечение учебно-вспомогательным и (или) иным персоналом**

не требуется

### **3.3. Материально-техническое обеспечение**

#### **3.3.1 Характеристики аудиторий (помещений, мест) для проведения занятий**

Стандартно оборудованные лекционные аудитории, должны вмещать поток в соответствии со списком студентов

### **3.3.2 Характеристики аудиторного оборудования, в том числе неспециализированного компьютерного оборудования и программного обеспечения общего пользования**

доска для письма мелом или фломастером

### **3.3.3 Характеристики специализированного оборудования**

не требуется

### **3.3.4 Характеристики специализированного программного обеспечения**

не требуется

### **3.3.5 Перечень и объёмы требуемых расходных материалов**

Мел — не менее 1 куски на час лекционных занятий, фломастеры для доски, губка

## **3.4. Информационное обеспечение**

### **3.4.1 Список обязательной литературы**

1. Ю.Д.Бураго, В.А.Залгаллер. Введение в риманову геометрию. Спб: Наука, 1994.
2. Д.Громол, В.Клингенберг, В.Мейер. Риманова геометрия в целом. М: Мир, 1971.

### **3.4.2 Список дополнительной литературы**

1. P. Petersen. Riemannian geometry. Springer, 2006.
2. J.Cheeger, D.Ebin. Comparison theorems in Riemannian geometry. North-Holland, 1975.

### **3.4.3 Перечень иных информационных источников**

## **Раздел 4. Разработчики программы**

Иванов Сергей Владимирович, доктор физ.-мат. наук, главный научный сотрудник ПОМИ РАН, svivanov@pdmi.ras.ru