

Санкт-Петербургский государственный университет

**РАБОЧАЯ ПРОГРАММА
УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ**

Теория операторов в гильбертовом пространстве (осн курс), тр 7 сем
Operator Theory in Hilbert Space

Язык(и) обучения

русский

Трудоемкость в зачетных единицах: 2

Регистрационный номер рабочей программы: 053629

Раздел 1. Характеристики учебных занятий

1.1. Цели и задачи учебных занятий

Знакомство с основами теории идеалов компактных операторов, с теорией неограниченных операторов в гильбертовом пространстве, спектральной теории дифференциальных операторов, теории возмущений, элементами квантовой механики, теории рассеяния.

1.2. Требования подготовленности обучающегося к освоению содержания учебных занятий (пререквизиты)

Владение курсом «Функциональный анализ».

1.3. Перечень результатов обучения (learning outcomes)

Обучающийся должен овладеть теоретическим материалом в объеме, предусмотренном программой, уметь применять полученные знания при решении теоретических и прикладных задач, на основе анализа освоенных разделов: компактные операторы, линейные неограниченные операторы, спектр замкнутого оператора, расширения симметричных операторов, спектральные теоремы, теория возмущений, прямой интеграл и унитарные инварианты спектральной меры ; уяснить логику и технику построения математической теории как фундамента самостоятельных научных исследований

1.4. Перечень и объём активных и интерактивных форм учебных занятий

Промежуточная аттестация (зачет) 2 часа, семинары 30 часов.

Раздел 2. Организация, структура и содержание учебных занятий

2.1. Организация учебных занятий

2.1.1 Основной курс

Трудоёмкость, объёмы учебной работы и наполняемость групп обучающихся																	
Код модуля в составе дисциплины, практики и т.п.	Контактная работа обучающихся с преподавателем											Самостоятельная работа			Объём активных и интерактивных форм учебных занятий	Трудоёмкость	
	лекции	семинары	консультации	практические занятия	лабораторные работы	контрольные работы	коллоквиумы	текущий контроль	промежуточная аттестация	итоговая аттестация	под руководством преподавателя	в присутствии преподавателя	сам. раб. с использованием методических материалов	текущий контроль (сам. раб.)			промежуточная аттестация (сам. раб.)
ОСНОВНАЯ ТРАЕКТОРИЯ																	
очная форма обучения																	
Семестр 7		30						2				34		6		32	2
		10-25						2-50				1-1		1-1			
ИТОГО		30						2				34		6		32	2

Трудоёмкость, объёмы учебной работы и наполняемость групп обучающихся																	
Код модуля в составе дисциплины, практики и т.п.	Контактная работа обучающихся с преподавателем											Самостоятельная работа			Объём активных и интерактивных форм учебных занятий	Трудоёмкость	
	лекции	семинары	консультации	практические занятия	лабораторные работы	контрольные работы	коллоквиумы	текущий контроль	промежуточная аттестация	итоговая аттестация	под руководством преподавателя	в присутствии преподавателя	сам. раб. с использованием методических материалов	текущий контроль (сам. раб.)			промежуточная аттестация (сам. раб.)
ОСНОВНАЯ ТРАЕКТОРИЯ																	
очная форма обучения																	
Семестр 7																	
ИТОГО																	

Виды, формы и сроки текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации							
Код модуля в составе дисциплины, практики и т.п.	Формы текущего контроля успеваемости		Виды промежуточной аттестации		Виды итоговой аттестации (только для программ итоговой аттестации и дополнительных образовательных программ)		Сроки
	Формы	Сроки	Виды	Сроки	Виды	Сроки	
ОСНОВНАЯ ТРАЕКТОРИЯ							
очная форма обучения							
Семестр 7			экзамен, устно, традиционная форма	по графику промежуточной аттестации			

				ии, по графику промеж уточной аттестац ии		
--	--	--	--	--	--	--

2.2. Структура и содержание учебных занятий

Период обучения (модуль): Семестр 7

№ п/п	Наименование темы (раздела, части)	Вид учебных занятий	Количество часов
1	Идеалы компактных операторов. Линейные неограниченные операторы	Лекции	12
		семинары	12
		в присутствии преподавателя по методическим материалам	20
2	Спектральные теоремы. Теория возмущений.	Лекции	10
		семинары	10
		в присутствии преподавателя по методическим материалам	16
3	Прямой интеграл и унитарные инварианты спектральной меры	Лекции	8
		семинары	8
		в присутствии преподавателя по методическим материалам	12
4	Экзамен, зачет	промежуточная аттестация (ауд)	2
		промежуточная аттестация (с.р.)	32

Раздел 1: Компактные операторы. Разложение Шмидта, s -числа оператора. Вариационный принцип для собственных чисел самосопряженного компактного оператора. Идеалы компактных операторов --- ядерные операторы, операторы Гильберта--Шмидта. След оператора. Непрерывные функционалы в идеалах компактных операторов. Вычисление следа, примеры. s -числа оператора вложения пространства Соболева, оценки s -чисел интегральных операторов.

Раздел 2: Линейные неограниченные операторы. Замкнутые операторы и операторы, допускающие замыкание. График оператора. Подчиненность операторов. Сохранение свойств замкнутости и сопряженности при подчиненном возмущении операторов. Оператор T^*T .

Раздел 3: Спектр замкнутого оператора. Дефектное число замкнутого оператора, устойчивость при подчиненных возмущениях. Регулярные точки и точки регулярного типа. Резольвента. Классификация точек спектра. Примеры.

Раздел 4: Расширения симметричных операторов.

Сопряженный, симметричный и самосопряженный операторы. Индексы дефекта симметричного оператора. Изометрические и унитарные операторы, индексы дефекта изометрического оператора. Преобразование Кэли. Приводящие

подпространства. Расширение по Нейману симметричного оператора. Оператор умножения на независимую переменную. Примеры операторов дифференцирования.

Раздел 5: Спектральные теоремы.

Спектральная мера. Интеграл по спектральной мере от ограниченной функции. Свойства интеграла для неограниченной функции. Спектральные теоремы для унитарного, самосопряженного и нормального операторов. Полугруппы операторов. Теорема Стоуна. Приложения к дифференциальным уравнениям в гильбертовом пространстве. Полярное представление замкнутого оператора.

Раздел 6: Теория возмущений.

Существенный и дискретный спектр самосопряженного оператора. Примеры. Компактные, конечномерные и малые возмущения самосопряженного оператора, спектры возмущенных операторов. Спектр конечномерного расширения. Полуограниченные операторы и формы. Критерий дискретности спектра полуограниченного оператора. Вариационный принцип. Расширение по Фридрихсу полуограниченного оператора. Расширение по Нейману, связи с дифференциальными уравнениями.

Раздел 7: Прямой интеграл и унитарные инварианты спектральной меры.

Прямой интеграл гильбертовых пространств. Операторы умножения. Порождающие системы и спектральные типы. Полная система унитарных инвариантов спектральной меры. Унитарные инварианты самосопряженного оператора.

Раздел 3. Обеспечение учебных занятий

3.1. Методическое обеспечение

3.1.1 Методические указания по освоению дисциплины

Посещение лекций и семинаров

3.1.2 Методическое обеспечение самостоятельной работы

Основная и дополнительная литература

3.1.3 Методика проведения текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации и критерии оценивания

Методика проведения зачета

Зачет проводится в устной форме. Билет состоит из двух вопросов. Время подготовки ответа на вопросы билета составляет 60 минут.

Использование конспектов и учебников, а также электронных устройств хранения, обработки или передачи информации при подготовке и ответе на вопросы экзамена категорически запрещено. В случае обнаружения факта использования недозволенных материалов (устройств) составляется акт и студент удаляется с экзамена. После ответа на вопросы билета преподаватель задает несколько дополнительных вопросов, на основании оценки ответов на которые итоговая оценка по предмету может быть повышена или понижена.

Критерии выставления оценок

Оценка «отлично» ставится за полностью раскрытый теоретический материал и правильные ответы на дополнительные вопросы преподавателя. В болонской шкале оценка может быть скорректирована в ту или иную сторону с учетом малозначительных погрешностей изложения или, напротив, углубленного изложения материала.

Оценка «хорошо» ставится за изложенный теоретический материал билета (возможно с помощью наводящих подсказок преподавателя).

Оценка «удовлетворительно» ставится за знание основных вопросов по каждой теме.

Оценка «неудовлетворительно» выставляется, если не выполняются условия для получения оценок «отлично», «хорошо» и «удовлетворительно».

3.1.4 Методические материалы для проведения текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации (контрольно-измерительные материалы, оценочные средства)

Период обучения (модуль): **Семестр 7**

Список вопросов к зачету:

1. Разложение Шмидта, s -числа оператора.
2. Идеалы компактных операторов --- ядерные операторы, операторы Гильберта--Шмидта. След оператора.
3. Непрерывные функционалы в идеалах компактных операторов.
4. Дефектное число замкнутого оператора, устойчивость при подчиненных возмущениях.
5. Регулярные точки и точки регулярного типа. Резольвента.
6. Сопряженный, симметричный и самосопряженный операторы.
7. Индексы дефекта симметричного оператора.
8. Преобразование Кэли. Приводящие подпространства.
9. Спектральная мера. Интеграл по спектральной мере от ограниченной функции. Свойства интеграла для неограниченной функции.

10. Спектральные теоремы для унитарного, самосопряженного и нормального операторов. Полугруппы операторов.
11. Теорема Стоуна.
12. Приложения к дифференциальным уравнениям в гильбертовом пространстве.
13. Полярное представление замкнутого оператора.
14. Существенный и дискретный спектр самосопряженного оператора. Примеры.
15. Полуограниченные операторы и формы. Критерий дискретности спектра полуограниченного оператора.
16. Прямой интеграл гильбертовых пространств.

Темы докладов на семинаре:

1. Вариационный принцип для собственных чисел самосопряженного
2. Вычисление следа, примеры. s -числа оператора вложения пространства Соболева, оценки s -чисел интегральных операторов.
3. Замкнутые операторы и операторы, допускающие замыкание. График оператора. Подчиненность операторов. Сохранение свойств замкнутости и сопряженности при подчиненном возмущении операторов. Оператор T^*T .
4. Классификация точек спектра. Примеры
5. Изометрические и унитарные операторы, индексы дефекта изометрического оператора.
6. Расширение по Нейману симметричного оператора. Оператор умножения на независимую переменную. Примеры операторов дифференцирования.
7. Приложения к дифференциальным уравнениям в гильбертовом пространстве.
8. Полярное представление замкнутого оператора.
9. Компактные, конечномерные и малые возмущения самосопряженного оператора, спектры возмущенных операторов. Спектр конечномерного расширения.
10. Вариационный принцип. Расширение по Фридрихсу полуограниченного оператора. Расширение по Нейману, связи с дифференциальными уравнениями.

11. Операторы умножения.

12. Порождающие системы и спектральные типы.

13. Полная система унитарных инвариантов спектральной меры.

14. Унитарные инварианты самосопряженного оператора.

3.1.5 Методические материалы для оценки обучающимися содержания и качества учебного процесса

3.2. Кадровое обеспечение

3.2.1 Образование и (или) квалификация штатных преподавателей и иных лиц, допущенных к проведению учебных занятий

К чтению лекций должны привлекаться преподаватели, имеющие ученую степень доктора или кандидата наук (в том числе степень PhD, прошедшую установленную процедуру признания и установления эквивалентности) и/или ученое звание профессора или доцента.

3.2.2 Обеспечение учебно-вспомогательным и (или) иным персоналом

не требуется

3.3. Материально-техническое обеспечение

3.3.1 Характеристики аудиторий (помещений, мест) для проведения занятий

Стандартно оборудованные лекционные аудитории, должны вмещать поток в соответствии со списком студентов

3.3.2 Характеристики аудиторного оборудования, в том числе неспециализированного компьютерного оборудования и программного обеспечения общего пользования

доска для письма мелом или фломастером

3.3.3 Характеристики специализированного оборудования

не требуется

3.3.4 Характеристики специализированного программного обеспечения

не требуется

3.3.5 Перечень и объёмы требуемых расходных материалов

Мел — не менее 1 куска на час лекционных занятий, фломастеры для доски, губка

3.4. Информационное обеспечение

3.4.1 Список обязательной литературы

Бирман М. Ш., Соломяк М. З. Спектральная теория самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве. СПб, «Лань», 2010.

Ахиезер Н. И., Глазман И. М. Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве. М., 1966.

Като Т. Теория возмущений линейных операторов. М., Мир, 1972г.

Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики. М., т.1-4. 1977 - 1978г.

3.4.2 Список дополнительной литературы

Рисс Ф., Секефальви-Надь Б. Лекции по функциональному анализу. М., 1979.

Рудин У. Функциональный анализ, М., Мир, 1975.

3.4.3 Перечень иных информационных источников

Раздел 4. Разработчики программы

Кароль Андрей Игоревич, к. ф.-м. н., доцент кафедры математической физики,
andrey.i.karol@gmail.com