

Санкт-Петербургский государственный университет

**РАБОЧАЯ ПРОГРАММА
УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ**

Теория случайных процессов
Theory of Random Processes

Язык(и) обучения

русский

Трудоемкость в зачетных единицах: 3

Регистрационный номер рабочей программы: XXXXX

Раздел 1. Характеристики учебных занятий

1.1. Цели и задачи учебных занятий

Сообщение сведений о теории случайных процессов в объеме, необходимом для общего развития и решения теоретических и прикладных задач соответствующей направленности. Усвоение основных идей, понятий и фактов теории случайных процессов.

1.2. Требования подготовленности обучающегося к освоению содержания учебных занятий (пререквизиты)

Курсы "Дискретная теория вероятностей" (семестр 2) и "Теория вероятностей" (семестр 5).

1.3. Перечень результатов обучения (learning outcomes)

Обучающийся должен овладеть теоретическим материалом в объеме, предусмотренном программой, уметь применять полученные знания при решении теоретических и прикладных задач, на основе анализа освоенных разделов: основные типы случайных процессов, гауссовские случайные процессы, случайные меры и стохастические интегралы, стационарные процессы и их спектральные представления, прогнозирование стационарных последовательностей, устойчивые случайные величины и процессы, сходимость процессов; уяснить логику и технику построения математической теории как фундамента самостоятельных научных исследований.

1.4. Перечень и объём активных и интерактивных форм учебных занятий

Промежуточная аттестация (экзамен) 4 часа.

Раздел 2. Организация, структура и содержание учебных занятий

2.1. Организация учебных занятий

2.1.1 Основной курс

Трудоёмкость, объёмы учебной работы и наполняемость групп обучающихся																		
Код модуля в составе дисциплины, практики и т.п.	Контактная работа обучающихся с преподавателем												Самостоятельная работа				Объём активных и интерактивных форм учебных занятий	Трудоёмкость
	лекции	семинары	консультации	практические занятия	лабораторные работы	контрольные работы	коллективные работы	текстовый контроль	проектная аттестация	итоговая аттестация	подготовка преподавателя	в присутствии преподавателя	сам. раб. с использованием методов материалов	текстовый контроль (сам. раб.)	промежуточная аттестация (сам. раб.)	итоговая аттестация (сам. раб.)		
ОСНОВНАЯ ТРАЕКТОРИЯ																		
очная форма обучения																		
Семестр 6	32		2						2				44		28		4	3
	2-50		2-50						2-50				1-1		1-1			
ИТОГО	32		2						2				44		28		4	3

Виды, формы и сроки текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации						
Код модуля в составе дисциплины, практики и т.п.	Формы текущего контроля успеваемости		Виды промежуточной аттестации		Виды итоговой аттестации (только для программ итоговой аттестации и дополнительных образовательных программ)	
	Формы	Сроки	Виды	Сроки	Виды	Сроки
ОСНОВНАЯ ТРАЕКТОРИЯ						
очная форма обучения						
Семестр 6			экзамен, устно, традиционная форма	по графику промежуточной аттестации, по графику промежуточной аттестации		

2.2. Структура и содержание учебных занятий

Период обучения (модуль): **Семестр 6**

№ п/п	Наименование темы (раздела, части)	Вид учебных занятий	Количество часов
1	Основные типы случайных процессов	Лекции	4
		практические занятия	
		в присутствии преподавателя	
		по методическим материалам	6
2	Гауссовские случайные процессы	Лекции	4
		практические занятия	
		в присутствии преподавателя	
		по методическим материалам	8
3	Случайные меры и стохастические интегралы	Лекции	4
		практические занятия	
		в присутствии преподавателя	
		по методическим материалам	
4	Стационарные процессы и их спектральные представления	Лекции	6
		практические занятия	
		в присутствии преподавателя	
		по методическим материалам	6
5	Прогнозирование стационарных последовательностей	Лекции	
		практические занятия	4
		в присутствии преподавателя	
		по методическим материалам	6
6	Устойчивые случайные величины и процессы	Лекции	4
		практические занятия	
		в присутствии преподавателя	
		по методическим материалам	6
7	Сходимость процессов	Лекции	6
		практические занятия	
		в присутствии преподавателя	
		по методическим материалам	6
9	Экзамен	промежуточная аттестация (ауд)	2
		промежуточная аттестация (с.р.)	28

Раздел 1: Основные типы случайных процессов

1. Понятие случайного процесса.
2. Стационарные процессы.
3. Процессы со стационарными приращениями.
4. Процессы с независимыми приращениями.

Раздел 2: Гауссовские случайные процессы

1. Определение гауссовского процесса.
2. Математическое ожидание и ковариационная функция как элементы, определяющие конечномерные распределения процесса.

3. Примеры гауссовских случайных процессов. Винеровский процесс и его свойства. Броуновский мост и его связь с винеровским процессом. Поле Винера-Ченцова (броуновский лист). Броуновская функция Леви. Дробное броуновское движение. Процесс Орнштейна-Уленбека.

Раздел 3: Случайные меры и стохастические интегралы

1. Определение меры с некоррелированными значениями и интеграла по ней. Простейшие свойства интеграла. Изометрическое свойство интеграла. Комплексные меры.
2. Меры с независимыми значениями. Гауссовский белый шум. Пуассоновские меры.
3. Выражение основных гауссовских процессов (винеровский процесс, броуновский мост, броуновский лист, броуновская функция Леви, дробное броуновское движение, процесс Орнштейна-Уленбека) в виде интегралов по белому шуму.

Раздел 4: Стационарные процессы и их спектральные представления

1. Стационарный процесс в широком смысле.
2. Спектральное представление, спектральная мера, спектральная плотность. Связь корреляционной функции и спектральной меры. Спектральный критерий дифференцируемости и спектральное представление производной.
3. Закон больших чисел.
4. Примеры: спектр процесса Орнштейна-Уленбека, процесс с двухточечным спектром.
5. Особенности спектрального представления вещественного процесса.

Раздел 5: Прогнозирование стационарных последовательностей

1. Понятие линейного прогноза. Ошибка прогноза. Регулярные и сингулярные процессы. Примеры.
2. Аналитическая интерпретация задачи прогнозирования. Различные пространства функций, связанные с понятиями "прошлого" и "будущего".
3. Достаточные условия построения прогноза. Построение прогноза в случае факторизуемой спектральной плотности. Вычисление ошибки прогноза. Построение факторизации спектральной плотности при помощи разложения логарифма в ряд Фурье. Определение ошибки прогноза на один шаг в общем случае.
4. Рациональные спектральные плотности. Приведение их к каноническому виду, факторизация и построение прогноза. Примеры решения задач прогноза.

Раздел 6: Устойчивые случайные величины и процессы

1. Устойчивые случайные величины. Определение, спектральное представление, параметризация семейства устойчивых величин. Строгая устойчивость. Представление Леви-Хинчина устойчивого распределения. Симметричные и односторонние устойчивые законы. Явная формула характеристической функции устойчивого закона.
2. Хвосты и моментные свойства устойчивых распределений. Устойчивые меры с независимыми значениями и интегралы по ним.
3. Однородные процессы с независимыми приращениями. Определение. Формула для характеристической функции. Представление через интеграл по пуассоновской мере.
4. Устойчивые процессы с независимыми приращениями. Пример: устойчивый субординатор. Субординаторы общего вида как процессы времени выхода устойчивых процессов с независимыми приращениями. Устойчивые процессы общего вида.

Раздел 7: Сходимость процессов

1. Сходимость конечномерных распределений. Определения слабой сходимости процессов и их эквивалентность. Связь между слабой сходимостью и сходимостью КМР. Примеры: принцип инвариантности, сходимость эмпирических процессов, сходимость нормированной траектории инерционной частицы.
2. Плотность семейства распределений. Теорема Прохорова об эквивалентности относительной компактности и плотности. Достаточное условие плотности (аналог теоремы Арцела-Асколи).
3. Теорема о необходимых и достаточных условиях слабой сходимости процессов в $C[0,1]$. Моментное условие плотности семейства мер в $C[0,1]$. Принцип инвариантности в $C[0,1]$.
4. Примеры непрерывных функционалов и предельная теорема для них. Принцип отражения. Предельная теорема для распределения максимума случайного блуждания. Распределение времени первого выхода для винеровского процесса. Разрывные функционалы: момент выхода и время пребывания. Предельная теорема для разрывных функционалов. Предельная теорема для момента выхода. Закон арксинуса.

Раздел 3. Обеспечение учебных занятий

3.1. Методическое обеспечение

3.1.1 Методические указания по освоению дисциплины

Посещение лекций и практических занятий

3.1.2 Методическое обеспечение самостоятельной работы

Основная и дополнительная литература

3.1.3 Методика проведения текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации и критерии оценивания

Методика проведения экзамена

Экзамен проводится в устной форме. Билет состоит из двух вопросов. Время подготовки ответа на вопросы билета составляет 60 минут.

Использование конспектов и учебников, а также электронных устройств хранения, обработки или передачи информации при подготовке и ответе на вопросы экзамена категорически запрещено. В случае обнаружения факта использования недозволенных материалов (устройств) составляется акт и студент удаляется с экзамена. После ответа на вопросы билета преподаватель задает несколько дополнительных вопросов, на основании оценки ответов на которые итоговая оценка по предмету может быть повышена или понижена.

Критерии выставления оценок:

Оценка «отлично» ставится за полностью раскрытый теоретический материал и правильные ответы на дополнительные вопросы преподавателя. В болонской шкале оценка может быть скорректирована в ту или иную сторону с учетом малозначительных погрешностей изложения или, напротив, углубленного изложения материала.

Оценка «хорошо» ставится за изложенный теоретический материал билета (возможно с помощью наводящих подсказок преподавателя).

Оценка «удовлетворительно» ставится за знание основных вопросов по каждой теме.

Оценка «неудовлетворительно» выставляется, если не выполняются условия для получения оценок «отлично», «хорошо» и «удовлетворительно».

3.1.4 Методические материалы для проведения текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации (контрольно-измерительные материалы, оценочные средства)

Период обучения (модуль): Семестр 6

Список вопросов к экзамену:

1. Основные типы случайных процессов.
2. Гауссовские случайные процессы.
3. Случайные меры и стохастические интегралы.
4. Гауссовский белый шум и пуассоновские меры.
5. Стационарные процессы.
6. Спектральное представление, спектральная мера.
7. Закон больших чисел для стационарных процессов.
8. Особенности спектрального представления вещественного процесса.
9. Линейные преобразования случайных процессов и последовательностей.
10. Переходная и передаточная функция.
11. Композиция интегральных преобразований.
12. Идеальный фильтр и интегрирующая цепь.
13. Авторегрессионная последовательность и её обобщения.
14. Понятие линейного прогноза.
15. Аналитическая интерпретация задачи прогнозирования.
16. Достаточные условия построения прогноза.
17. Построение прогноза в случае факторизируемой спектральной плотности.
18. Построение факторизации спектральной плотности при помощи разложения логарифма в ряд Фурье.
19. Определение ошибки прогноза на один шаг в общем случае.
20. Рациональные спектральные плотности. Приведение их к каноническому виду, факторизация и построение прогноза.
21. Сложные пуассоновские случайные величины и их пределы.
22. Определение, спектральное представление, параметризация семейства устойчивых величин.
23. Представление Леви-Хинчина устойчивого распределения.
24. Явная формула характеристической функции устойчивого закона.
25. Устойчивые меры с независимыми значениями и интегралы по ним.
26. Однородные процессы с независимыми приращениями.
27. Устойчивые процессы с независимыми приращениями.
28. Субординаторы.
29. Устойчивые процессы общего вида.
30. Предельная теорема о сходимости к устойчивым распределениям.
31. Устойчивость предела сумм н.о.р. случайных величин.
32. Сходимость конечномерных распределений.
33. Определения слабой сходимости процессов и их эквивалентность.
34. Плотность семейства распределений. Теорема Прохорова.
35. Достаточное условие плотности (аналог теоремы Арцела-Асколи).
36. Теорема о необходимых и достаточных условиях слабой сходимости процессов в $C[0,1]$.
37. Моментное условие плотности семейства мер в $C[0,1]$.
38. Принцип инвариантности в $C[0,1]$.
39. Принцип отражения. Предельная теорема для распределения максимума случайного блуждания.

- 39. Распределение времени первого выхода для винеровского процесса.
- 40. Предельная теорема для разрывных функционалов.
- 41. Закон арксинуса.

3.1.5 Методические материалы для оценки обучающимися содержания и качества учебного процесса

3.2. Кадровое обеспечение

3.2.1 Образование и (или) квалификация штатных преподавателей и иных лиц, допущенных к проведению учебных занятий

К чтению лекций должны привлекаться преподаватели, имеющие ученую степень доктора или кандидата наук (в том числе степень PhD, прошедшую установленную процедуру признания и установления эквивалентности) и/или ученое звание профессора или доцента.

3.2.2 Обеспечение учебно-вспомогательным и (или) иным персоналом

не требуется

3.3. Материально-техническое обеспечение

3.3.1 Характеристики аудиторий (помещений, мест) для проведения занятий

Стандартно оборудованные лекционные аудитории, должны вмещать поток в соответствии со списком студентов

3.3.2 Характеристики аудиторного оборудования, в том числе неспециализированного компьютерного оборудования и программного обеспечения общего пользования

доска для письма мелом или фломастером

3.3.3 Характеристики специализированного оборудования

не требуется

3.3.4 Характеристики специализированного программного обеспечения

не требуется

3.3.5 Перечень и объёмы требуемых расходных материалов

Мел — не менее 1 куска на час лекционных занятий, фломастеры для доски, губка

3.4. Информационное обеспечение

3.4.1 Список обязательной литературы

1. Булинский А.В., Ширяев А.Н.. Теория случайных процессов. -- М. Физматлит, 2003.
2. Вентцель А.Д. Курс теории случайных процессов. -- Физматлит, издания 1975 и 1996.
3. Лифшиц М.А. Случайные процессы: от теории к практике. -- С-Пб., Лань, 2015.

3.4.2 Список дополнительной литературы

1. Биллингсли П. Сходимость вероятностных мер. -- М. Наука, 1977.
2. Розанов Ю.А. Случайные процессы. -- М. Наука, издания 1971 и 1979.
3. Розанов Ю.А. Введение в теорию случайных процессов. -- М. Наука, 1982.

3.4.3 Перечень иных информационных источников

не предусмотрен

Раздел 4. Разработчики программы

Лифшиц Михаил Анатольевич, доктор физ.-мат. наук, профессор кафедры теории вероятностей и математической статистики СПбГУ, mikhail@lifshits.org