Анализ, геометрия и математическая физика
16-20 декабря, Междисциплинарная лаборатория им. П.Л.Чебышева,
Санкт-Петербургский государственный университет (14 линия, д. 29б)

16 декабря
14-30 – 15-00 Регистрация
15-00 – 16-00 Н. Калинин, лекция 1
Кофе-брейк
16-20 – 17-20 А. Ананьевский

17 декабря
11-00 - 12-00 П. Затицкий
Кофе-брейк
12-20 – 13-20 К. Федоровский
Ланч
15-00 – 15-50 Н. Калинин, лекция 2
Кофе-брейк
16-10 – 17-10 П. Зограф
17-20 – 18-10 И. Дынников, лекция 1

18 декабря
11-00 - 11-50 И. Дынников, лекция 2
Кофе-брейк
12-10 - 13-00 А. Зорич, Лекция 1
Ланч
14-30 - 15-20 С. Немировский, лекция 1
Кофе-брейк
15-40 - 16-30 М. Казарян, Лекция 1
16-40 – 1740 М. Скопенков

19 декабря
11-00 - 11-50 И. Дынников, лекция 3
Кофе-брейк
12-10 – 13-00 С. Немировский, лекция 2
Ланч
14-30 – 15-20 А. Зорич, Лекция 2
Кофе-брейк
15-40 – 16-30 М. Казарян, Лекция 2

20 декабря
11-00 - 11-50 М. Казарян, Лекция 3
Кофе-брейк
12-10 – 13-00 А. Зорич, Лекция 3
Ланч

Список миникурсов и докладов

Миникурсы:

И.А. Дынников (Математический институт им. В.А.Стеклова РАН и МГУ)
Монотонное упрощение узлов и контактная топология
А.В. Зорич (Сколтех и Математический институт Париж 7)
Связь между плоской и гиперболической перечислительной геометрией
М.Э. Казарян (Высшая школа экономики и Сколтех)
Числа Гурвица и топологическая рекурсия
Н.С. Калинин (Высшая школа экономики, Санкт-Петербург)
Тропические кривые и формы на них
С.Ю. Немировский (Математический институт им. В.А.Стеклова РАН)
Голоморфные функции и вещественные поверхности в C^2

Доклады:

А.С. Ананьевский (ПОМИ РАН)
Клеточные структуры на однородных алгебраических многообразиях
П.Б. Затицкий (ПОМИ РАН и СПбГУ)
Функция Беллмана и оценка интегральных функционалов
П.Г. Зограф (ПОМИ РАН и СПбГУ)
Математическая физика ленточных графов
М.Б.Скопенков (Высшая школа экономики и Институт проблем передачи информации РАН)
The Feynman checkerboard: discrete quantum mechanics
К.Ю. Федоровский (МГТУ им. Н.Э. Баумана)
Множества Каратеодори в комплексной плоскости

Аннотации

И.А. Дынников (Математический институт им. В.А.Стеклова РАН и МГУ)
Монотонное упрощение узлов и контактная топология

Можно ли распознавать и сравнивать узлы, просто упрощая диаграммы и приводя их к какому-то каноническому виду? Подобный наивный подход долгое время считался непродуктивным, поскольку попытки его реализации наталкивались на сложные неупрощаемые примеры диаграмм тривиального узла. Однако, как оказалось, такой подход вовсе не безнадежен, просто нужно "правильно" угадать способ представления узлов, соответствующую функцию сложности и набор элементарных преобразований.

В начале 2000-х мне удалось доказать, что для так называемых прямоугольных диаграмм узлов задачу распознавания тривиального узла можно решать с помощью нестрого монотонного упрощения. Естественно возникает желание расширить этот подход на произвольные узлы и зацепления, на которые он буквально не обобщается, так как нетривиальные топологические типы узлов обычно представляются более чем одной неупрощаемой прямоугольной диаграммой.

В совместной работе с М. Прасоловым мы обнаружили, что возможность упрощения прямоугольной диаграммы узла имеет естественную интерпретацию в терминах контактной топологии. А именно, каждая прямоугольная диаграмма задает два так называемых лежандровых узла, и упрощаемость диаграммы в точности означает, что один из этих узлов допускает дестабилизацию. Вопрос о применении метода монотонного упрощения для произвольных узлов оказался теснейшим образом связан с классификацией лежандровых узлов внутри каждого топологического типа. Это обстоятельство помогло и в изучении самих лежандровых узлов - мы научились их алгоритмически сравнивать.

В своих лекциях я дам все необходимые определения, расскажу о современном состоянии данного подхода и его возможных перспективах. План примерно следующий: на первой лекции рассказать про прямоугольные диаграммы и теорему о монотонном упрощении, на второй - про лежандровы узлы и их связь с прямоугольными диаграммами, а на третьей изложить наиболее существенные современные результаты.

А.В. Зорич (Сколтех и Математический институт Париж 7)

Связь между плоской и гиперболической перечислительной геометрией

Мариам Мирзахани доказала, что частоты, с которыми встречаются длинные замкнутые несамопересекающиеся геодезические, зависят только от топологического типа соответствующей замкнутой кривой, но не зависят от гиперболической метрики поверхности.

В первых двух лекциях я расскажу ключевые идеи доказательства этого результата Мирзахани. На примере сферы с четырьмя проколами я покажу, как кодировать замкнутую несамопересекающуюся кривую на поверхности "железнодорожным графом" Тёрстона и постараюсь дать слушателям первое преставление о кусочно-линейной структуре пространства измеримых ламинаций (которое, появится неявно и без формального определения).

В последней лекции я расскажу о недавних результатах полученных совместно с Э. Гужар, В. Делекруа, и П. Зографом. Мы доказали, что частоты, с которыми встречаются квадратно-замощенные поверхности фиксированного топологического типа совпадают с частотами Мирзахани и вывели формулу для объемов Мэйзура-Вича в терминах чисел пересечения. Основываясь на этих результатах и двух гипотезах, я дам описание "случайной" квадратно-замощенной поверхности большого рода и "случайной" мульти-кривой на поверхности большого рода.

Лекции будут неформальными; в некоторых местах нестрогими и почти без доказательств, но я надеюсь сделать их доступными для студентов третьего курса и старше.

М.Э. Казарян (Высшая школа экономики и Сколтех)

Числа Гурвица и топологическая рекурсия

Числа Гурвица перечисляют разветвленные накрытия сферы с заданными данными ветвления, или, что то же самое, разложения данной перестановки в произведение перестановок заданного циклического типа (например, транспозиций). Производящая функция для различных вариантов чисел Гурвица обладает огромным количеством свойств интегрируемости, характерных для теории Громова-Виттена, матричных моделей, и близких задач, встречающихся в современной математической физике и теории пространств модулей. Одним из наиболее интригующих таких свойств являются соотношения топологической рекурсии (рекурсии Чехова-Эйнара-Орантена), столь популярной в последние годы. Тем самым, числа Гурвица доставляют удобную комбинаторную модель для всех этих теорий, являясь достаточно богатой, но в то же

время сравнительно элементарной и доступной для исследований и компьютерных экспериментов.
Примерная программа лекций:
- Числа Гурвица и их варианты: монотонные, r-спиновые, орбифолдные числа Гурвица, перечисление карт, гиперкарт, числа Буске-Мелу—Шафера;
- Вычисление чисел Гурвица из комбинаторики симметрической группы: элементы Юциса-Мерфи и формула характеров для производящего ряда;
- Операторное бозон-фермион соответствие и эволюционное уравнение;
- Производящая функция для чисел Гурвица как тау-функция иерархии КП;
- Топологическая рекурсия.

Н.С. Калинин (Высшая школа экономики, Санкт-Петербург)
Тропические кривые и формы на них

Тропическая геометрия — молодая ветвь геометрии, где переплетаются аспекты алгебраической, гиперболической и симплектической геометрии. Есть несколько способов определять тропические многообразия, самый геометрический из них — через вырождение комплексной структуры. О нём и будет рассказано.

С.Ю. Немировский (Математический институт им. В.А.Стеклова РАН)
Голоморфные функции и вещественные поверхности в C^2

Специфика геометрии четырехмерных вещественных многообразий проявляется и в комплексном анализе на двумерных комплексных многообразиях. Мы рассмотрим примеры, возникающие в задачах продолжения и аппроксимации голоморфных функций, заданных в окрестностях вещественных поверхностей в ${\mathbb C}^2$.

А.С. Ананьевский (ПОМИ РАН)
Клеточные структуры на однородных алгебраических многообразиях

Один из подходов к вычислению когомологических инвариантов многообразий состоит в том, чтобы снабдить многообразие некоторой явной фильтрацией - клеточной структурой - а затем вычислить инварианты индуктивно по членам фильтрации. Оказывается, что в алгебраической геометрии такие фильтрации существуют очень редко: их допускают некоторые однородные многообразия, а, например, кривые положительного рода - нет. В своём докладе я напомню описание хорошо известной клеточной структуры на однородных проективных многообразиях (клетки Шуберта), а также расскажу о некоторых вариациях - клеточной структуре на многообразии симплектических плоскостей в симплектическом пространстве и на чётномерной аффинной квадрике.

П.Б. Затицкий (ПОМИ РАН и СПбГУ)
Функция Беллмана и оценка интегральных функционалов

В докладе будет рассказано о методе функции Беллмана применительно к оценке интегральных функционалов на некоторых функциональных классах. Метод позволяет свести исходную бесконечномерную экстремальную задачу к конечномерной задаче выпуклой геометрии, которая во многих случаях может быть решена явно.

П.Г. Зограф (ПОМИ РАН и СПбГУ)

Математическая физика ленточных графов

Лекция служит введением к мини-курсу М. Казаряна. Мы рассмотрим производящую функцию, коэффициенты которой перечисляют ленточные графы фиксированного комбинаторного типа, и обсудим ряд ее замечательных свойств. В частности, мы покажем, что эта функция удовлетворяет соотношениям Вирасоро, эволюционному уравнению, иерархии Кадомцева-Петвиашвили и топологической рекурсии.

М.Б.Скопенков (Высшая школа экономики и Институт проблем передачи информации РАН)

The Feynman checkerboard: discrete quantum mechanics

We study the most elementary model of electron motion introduced by R.Feynman. It is a game, in which a checker moves on a checkerboard by certain simple rules, and we count the turnings. We give a first rigorous proof that the model reproduces the (1+1)-dimensional retarded Dirac propagator in the continuum limit, with an explicit estimate of the convergence rate. This justifies a heuristic derivation by J.Narlikar from 1971. In a sense, this is also a continuum limit of a 1-dimensional Ising model with imaginary edge weights (H.Gersh, 1981), and a new approach to making quantum field theory rigorous and algorithmic. For the model, we also show an exact charge conservation and a coupling to lattice gauge theory, and state visual open problems. This is a joint work with A. Ustinov

К.Ю. Федоровский (МГТУ им. Н.Э. Баумана)

Множества Каратеодори в комплексной плоскости

Понятие множества Каратеодори возникло в самом начале XX столетия в связи с развитием теории конформных отображений. Этот класс множеств естественно возникает во многих задачах комплексного анализа и теории приближений аналитическими функциями. В докладе будет изложена история этого понятия, представлен ряд "забытых" и "потерянных" результатов (в частности, ряд результатов О. Дж. Фаррелла о конформных отображениях и об аппроксимации функций многочленами). Во второй части доклада планируется привести ряд недавних результатов, существенно связанных с множествами Каратеодори, а также несколько открытых вопросов.