

## Problem set 1

(из учебника)

1) Пусть  $-\infty < a < b < \infty$  и  $f(z) = \int_a^b e^{itz} d\sigma(t)$  где  $\sigma$  — функция ограниченной вариации,  $\sigma_m(z)$  и  $\sigma_{-m}(z)$  с  $m > 0$  — функции с  $m$ -м порядком. Тогда  $f$  имеет бесконечное число нулей.

2) Пусть  $f, g$  целые функции порядка  $< 2$

и  $f^2 + g^2 \equiv 1$ . Тогда  $f(z) = \cos(\alpha z + \beta)$ ,  
 $g(z) = \sin(\alpha z + \beta)$  при некоторых  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$

3) Найдите необходимые и достаточные условия для существования бесконечного произведения

$$\prod \frac{\sin \alpha_n z}{\alpha_n z}$$

и целой функции. Когда это функция  
является каноническим? Сила?

4) (не ус кончки)

Докажите 
$$\prod_{k=1}^{\infty} \cos\left(\frac{z}{2^k}\right) = \frac{\sin z}{z}$$

Комментарий Это соответствие известных свойств wavelets с комплексными коэффициентами.

5) Пусть  $q_n$  некоторый целый порядок функции  $f(z)$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\log M_f(r)}{r} = \lambda$$

Докажите, что  $\sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)}(z)$  :

сходится при  $\lambda < 1$

расходится при  $\lambda > 1$

возможны оба варианта при  $\lambda = 1$

