Методы исследования дискретного спектра операторов классической и квантовой физики

Г.В. Розенблюм

Целью курса является ознакомление слушателей с классическими и новейшими результатами и методами анализа вопросов существования, конечности или бесконечности, оценок и асимптотического поведения собственных значений операторов, возникающих в задачах квантовой и классической механики. Предполагается владение основными знаниями из курсов Функционального Анализа и Уравнений Математической Физики. Будет предложено большое количество нерешенных задач для самостоятельного исследования. В качестве экзамена будет предложено сделать краткий доклад с изложением актуальной недавно опубликованной статьи по теме курса, либо экзамен в традиционной форме.

В курсе этого года будут включены некоторые новые разделы, в первую очередь, относящиеся к спектральному анализу операторов с магнитным полем, в особенности, возмущенного гамильтониана Ландау, а также к анализу операторов с нетрадиционным вхождением спектрального параметра.

(1) Введение. Типичные вопросы о собственных значениях. Типичные результаты. Нетипичные результаты. Фазовый объем.
(2)
(3) Предварительные сведения. Компактные операторы, собственные и сингулярные числа, свойства, вариационное описание, теоремы о возмущениях. Классы фунций, теоремы вложения. Понятие псевдодифференциалого оператора.
(4) Признаки принадлежности интегральных и псевдодифференциальных операторов классам Шаттена.
(5) Операторы типа Шредингера. Операторы с магнитным полем. Оператор Паули. Задание самосопряженных операторов. Квадратичные формы. Качественные результаты о спектре. Теоремы типа А.М. Молчанова.
(6) Принцип Бирмана-Швингера и связь с теоремами вложения.
(7) Гамильтониан Ландау. Спектр в четной и нечетной размерности. Спектр возмущенного гамильтониана Ландау. Связь с операторами Теплица. Различные асимптотические задачи.
(8) Осцилирующие потенциалы и теоремы Мазьи-Вербицкого. Наличие связанных состояний в случае малой размерности. Альтернатива Вугальтера.

(9) Количественные методы в теоремах вложения. Оценки типа ЦЛР. Первое доказательство и связь с кусочно-полиномиальными приближениями.
(10) Идея тауберовых методов. Параболические уравнения и спектр. Оценка Розенблюма-Соломяка. Дискретный спектр оператора Дирака, релятивистского оператора Шредингера.
(11) Спектр операторов на комбинаторных и квантовых графах. Дальнейшие обобщения.
(12) Спектральная плотность, оценки для смешанных состояний и метод Рюмена-Франка.
(13) Собственные значения операторов типа Шредингера. Оценки в немагнитном и немагнитном случаях.
(14) Асимптотика собственных значений. Вейлевский и невейлевский случаи. Аппроксимационный метод получения асимптотических формул. Тауберовы методы.
(15) Задачи со спектральным параметром в граничных условиях. Спектральные свойства интегральных операторов типа потенциала на регулярных и нерегулярных поверхностях.
(16) Собственные значениях несамосопряженных операторов. Проблемы, методы и результаты.
(17) Обзор актуальных нерешенных задач.

Основная литература

Список литературы

[1] И.Ц.Гохберг, М.Г.Крейн. Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов. Наука, 1965.

[2] М.Ш.Бирман, М.З.Соломяк.; Количественный анализ в теоремах вложения С.Л.Соболева и приложения к спектральной теории. Десятая Математическая Школа, стр.5-189, Инст.Матем.АН Укр.ССР, Киев, 1974; англ. перевод: Quantitative analysis in Sobolev imbedding theorems and applications to spectral theory. American Mathematical Society Translations, Series 2, 114. American Mathematical Society, Providence, R.I., 1980.

[3] M.Gil'. Operator functions and operator equations. World Scientific, 2018.

[4] М.С.Агранович. Соболевские пространства, их обобщения и эллиптические задачи. изд-во МЦНМО, 2013.

[5] M.S.Agranovich, B.Z. Katsenelenbaum, A.N.Sivov , N.N. Voitovich. Generalized method of eigenoscillations in diffraction theory. Wiley, 1999.

[6] H. Ammari, H. Kang, H. Lee. Layer potential techniques in spectral analysis. AMS, 2009.

[7] R. Szmytkowski, Metoda R-macierzy dla rownan Schrodingera i Diraca.,Gdansk, PG, 1999.

[8] Г.В. Розенблюм, М.З. Соломяк, М.А.Шубин.; Спектральная теория дифференциальных операторов. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Т.64, 5-248 ВИНИТИ, 1989.|

[9] G.Rozenblum, M. Melgaard, Schrodinger operators with singular potentials. In: Chipot, M and Quittner, P (eds.) Handbook of differential equations : stationary partial differential equation. Handbook of differential equations, 2 . Elsevier/North-Holland, Amsterdam, pp. 407-517, 2005.

[10] R. Frank, Cwikel's theorem and the CLR inequality. J. Spectr. Theory 4 (2014), no. 1, 1–21.

[11] Г.В.Розенблюм, М.З.Соломяк. Оценка ЦЛР для генераторов положительных полугрупп и полугрупп доминируемых положительными. Алгебра и Анализ, 9 (1997), 214-236.

[12] A.Balinsky, ; D.Evans, Spectral analysis of relativistic operators. Imperial College Press, London, 2011.

[13] D. Edmunds, ; D. Evans, Spectral theory and differential operators. Oxford Mathematical Monographs. Oxford Science Publications. The Clarendon Press, OUP, New York, 1987.