Л01 13.02.

Введение

1. Определение целой функции

2. Примеры: $p(z)$, e^z, $\sin \pi z$, $\frac{\sin \pi \sqrt{z}}{\sqrt{z}}$

3. Ряд Тейлора

$$f(z) = \sum c_k z^k$$

условие сходимости. Неравенство Коши для коэффициентов.

4. Перечислим свойства полиномов.

4а. А какие вообще бывают целые функции?

5. Упражнение:

$$f \text{ – ц.ф.}, \ f(z) \neq 0, \ z \in \mathbb{C} \Rightarrow f(z) = e^{g(z)},$$

g – ц.ф.

6. Эксперименты: связь роста и количества корней.

7. $M(r)$, конечный и бесконечный порядок. Формула для порядка.

$$\rho = \overline{\lim} \frac{\log \log M_f(r)}{\log r}$$

8. Тип, конечный и бесконечный. Формула для типа.

$$\sigma = \overline{\lim_{r \to \infty}} \frac{\log M_f(r)}{r^\rho}$$

9. Замечание на примере $\sin az$: связь типа с количеством корней.

10. Любимый класс: целые функции экспоненциального типа.

11. Связь скорости роста с коэффициентами ряда Тейлора.

a. Формулы

$$\rho = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{n\log n}{-\log|c_n|}; \quad \sigma = \frac{1}{e\rho}\overline{\lim}\left(n|c_n|^{\rho/n}\right)$$

12. <u>Лемма:</u>

a. $M_f(r) \overset{as}{<} e^{Ar^K} \Rightarrow |c_n| < \left(\frac{eAK}{n}\right)^{n/K}$

b. $|c_n| < \left(\frac{eAK}{n}\right)^{n/K} \Rightarrow M_r(f) < e^{(A+\varepsilon)r^K}$

13. Выражения для порядка следуют из леммы.

14. <u>Упр</u>: Получить формулу для типа.

15. Док-во леммы в одну сторону

16. Док-во леммы в другую сторону. (напоминает Стирлинга).

17. Конструкция ф-ций с заданными характеристиками роста.

18. Упражнения.

a. Характеристики роста не меняются при дифференцировании/интегрировании.

b. $f^{(n)}(0) \in \mathbb{Z} \Rightarrow$ либо f полином

либо не меньшей пор. эксп. типа 1.

19. Характеристики произведения, среднее.

Как связать рост с корнями?!

20 Напоминание о гармонических ф-ях.

a. f - голоморфна, $f = u + iv$

б. Формула Пуассона:

$u(z)$ - гармонична в $|z| < R$;

$$u(re^{i\varphi}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(Re^{i\theta}) \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2rR\cos(\theta-\varphi) + r^2}\, d\theta$$

Упр. Вспомнить ф-лу Шварца и получить из неё ф-лу Пуассона.

20' Counting function $n(t)$.

21. Формула Йенсена:

$$\int_0^R \frac{n(t)}{t}\, dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|f(Re^{i\theta})|\, d\theta - \log|f(0)|$$

22. Упр. Как выглядит ф-ла Йенсена если $f(0) = 0$.

23. Nevanlinna: $f(z)$ has zeros & poles $n(t,0)$, $n(t,\infty)$

Упр:

$$\int_0^R \frac{n(t,0)}{t}\, dt - \int_0^R \frac{n(t,\infty)}{t}\, dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|f(Re^{i\theta})|\, d\theta - \log|f(0)|$$

Return to this later when discussing Nevanlinna characteristics.

24. Оценка числа корней

$n(r) < \log M(er)$

25. Упр. Увидеть насколько эта оценка улучшается для $f(z) = \sin \pi z$.

26. Meromorphic functions $n(t,0)$, $n(t,\infty)$

$$\int_0^R \frac{n(t,0)}{t}\,dt - \int_0^R \frac{n(t,\infty)}{t}\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|f(Re^{i\theta})|\,d\theta - \log|f(0)|$$

We return to this later when discussing Nevanlinna characteristics.

27. Application #1 Polya quasianalyticity

28. Application # 2 Completeness of a family of exponential functions.

a. General facts about completeness

b. $\underline{\lim} \frac{n(t)}{t} > 2 \Rightarrow$ completeness on $[-\pi,\pi]$.