# О подгруппах линейных групп над кольцами

Яков Нужин, Алексей Степанов

СФУ, СПбГУ

Пусть $G = SL_n$ – специальная линейная группа, $n \geq 3$, а $K$ – подкольцо коммутативного кольца $A$ с 1. Больше 40 лет назад была поставлена задача описания решетки $L = L(E(K), G(A))$ подгрупп, лежащих между элементарной подгруппой $E(K)$ и $G(A)$. Оказывается, что в стандартной ситуации все такие подгруппы лежат "недалеко" от групп $G(R)$ над промежуточными подкольцами $R$. Точнее, решетка $L$ разбивается в дизъюнктное объединение так называемых "сэндвичей"$L(E(R), N_A(R))$, где $R$ – подкольцо в $A$, $E(R)$ – элементарная подгруппа $G(R)$, а $N_A(R)$ – нормализатор $E(R)$ в $G(A)$. При этом факторгруппа $N_A(R)/E(R)$ для конечномерных колец разрешима, а для колец размерности Крулля $\leq 1$ совсем небольшая и чаще всего может быть явно вычислена.

Вместо $SL_n$ можно рассмотреть другую расщепимую классическую группу или даже группу Шевалле. Каждая группа Шевалле почти полностью характеризуется системой корней – конечным набором векторов, обладающим большим запасом симметрий. Система корней групп $SL_n$ и $SO_{2n}$ обозначаются $A_{n-1}$ и $D_n$ соответственно. Все корни в этих системах имеют одинаковую длину. Такие системы называются системами с простыми связями. Системы корней $B_n$ и $C_n$ для групп $SO_{2n+1}$ и $Sp_{2n}$ содержат корни разной длины: $a$ и $a\sqrt{2}$. Говорят, что такие системы имеют двойные связи.

Удивительно, но получающиеся результаты о стандартности решетки $L$ для групп Шевалле, отвечающих системам корней с простыми и двойными связями, абсолютно разные. Грубо говоря, для систем с двойными связями стандартное описание выполнено всегда, а с простыми связями – только при очень жестком условии на расширение колец.

**Теорема 1** (А. В. Степанов [7]). *Пусть $\Phi$ – система корней с двойными связями (т. е. $\Phi = B_n, C_n, F_4$), и $1/2 \in K$. Тогда решетка $L$ стандартна.*

В случае системы корней с двойными связями и необратимой двойки понятие стандартности необходимо расширить, добавив сэндвичи, соответствующие допустимым парам (одна аддитивная подгруппа на длинных корнях, другая – на коротких).

**Теорема 2** (Э. Бак, А. В. Степанов [1], Я.Н.Нужин, А.В.Степанов [4]). *Пусть $\Phi = B_n, C_n$, $n > 2$ и $2 = 0$ в $R$. Тогда решетка $L$ стандартна.*

Сформулируем теперь условие на расширение колец, которое гипотетически равносильно стандартности решетки $L$ для групп Шевалле, отвечающих системам корней с простыми связями.

**Определение 1.** Определение. Элемент $r \in A$ называется квази-алгебраическим над $K$, если существует многочлен над $K$ с унимодулярной строкой коэффициентов, корнем которого является $r$. Кольцо $A$ называется квази-алгебраическим над $K$, если все его элементы квази-алгебраические.

Грубо говоря, квази-алгебраическими являются только целые расширения, и локализации одномерных колец. В следующей теореме построен класс контрпримеров к стандартности решетки $L$.

**Теорема 3** (А. В. Степанов [6])**.** *Пусть $\Phi$ – система корней с простыми связями, т.е. $\Phi = A_n, D_n, E_n$. Если $A$ не является квази-алгебраическим над $K$, то решетка $L$ не стандартна. Более того, в этом случае описание решетки $L$ является в некотором смысле "дикой"задачей.*

Из положительных результатов для любых систем корней следует упомянуть следующие.

**Теорема 4** (Я. Н. Нужин [2, 3])**.** *Пусть $\Phi \neq A_1$ – система корней. Если $A$ – алгебраическое расширение поля $K$, то решетка $L$ стандартна.*

**Теорема 5** (Я. Н. Нужин, А. В. Якушевич [5])**.** *Пусть $\Phi \neq A_1$ – система корней. Если $A$ – поле частых области главных идеалов, то решетка $L$ стандартна.*

Приведенные результаты позволяют выдвинуть следующую гипотезу.

**Гипотеза 1.** *Пусть $\Phi$ – система корней ранга большего 2, или $\Phi = C_2$ и $1/2 \in K$. Решетка $L$ стандартна тогда и только тогда, когда выполнено одно из условий:*

1. *$\Phi$ – система корней с кратными связями;*
2. *$A$ является квази-алгебраическим над $K$.*

# Список литературы


[1] Э. Бак, А. В. Степанов, *Subring subgroups of symplectic groups in characteristic 2*, Алгебра и анализ **28** (2016), no. 4, 47–61.

[2] Я. Н. Нужин, *О группах, заключенных между группами лиева типа над различными полями*, Алгебра и логика **22** (1983), no. 5, 526–541.

[3] Я. Н. Нужин, *Группы, лежащие между группами Шевалле типа $B_l$, $C_l$, $F_4$, $G_2$ над несовершенными полями характеристики 2 и 3*, Сибирский матем. журн. **54** (2013), no. 1, 157–162.

[4] Я. Н. Нужин and А. В. Степанов, *Подгруппы групп Шевалле типов $B_l$ и $C_l$, содержащие группу над подкольцом, и связанные с ними ковры*, Алгебра и анализ **31** (2019), no. 4, 198–224.

[5] Я. Н. Нужин, А. В. Якушевич, *Промежуточные подгруппы групп Шевалле над полем частных кольца главных идеалов*, Алгебра и логика **39** (2000), no. 3, 347–358.

[6] А. В. Степанов, *Free product subgroups between Chevalley groups* $\mathrm{G}(\Phi, F)$ *and* $\mathrm{G}(\Phi, F[t])$, J. Algebra **324** (2010), no. 7, 1549–1557.

[7] А. В. Степанов, *Subring subgroups in Chevalley groups with doubly laced root systems*, J. Algebra **362** (2012), 12–29.